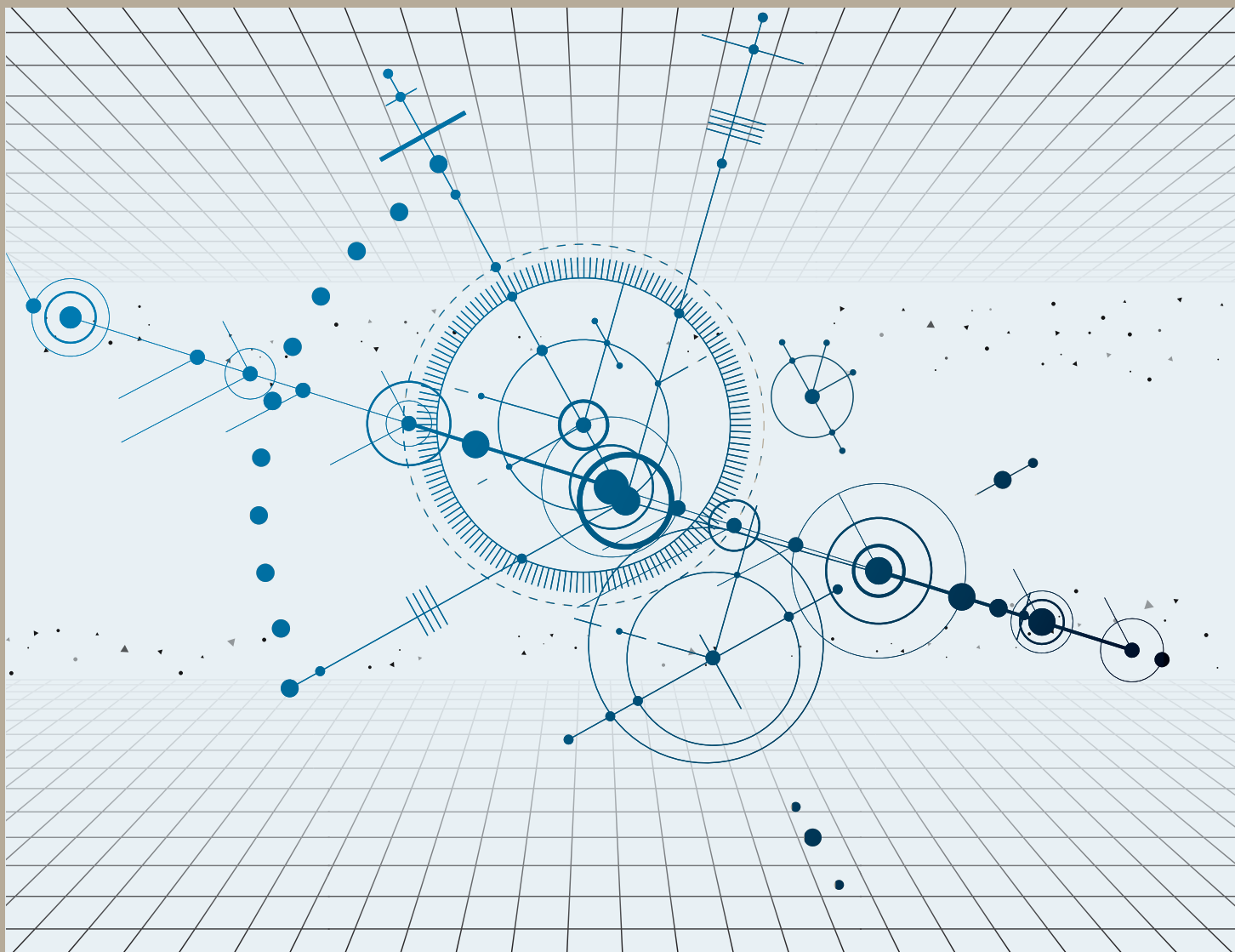




מתמטיקה קדם אקדמית

כרך ב

גיל אלון

תנאי שימוש בקובץ הדיגיטלי:

1. הקובץ הוא לשימושך **האישי** בלבד. פרטים מזהים שלך מוטבעים בקובץ בצורה גלויה ובצורה סמויה.
2. השימוש בקובץ הוא אך ורק למטרות לימוד, עיון ומחקר אישי.
3. העתקה או שימוש בתכנים נבחרים מותרת בהיקף העומד בכללי השימוש ההוגן, המפורטים בסעיף 19 לחוק זכות יוצרים 2007. במקרה של שימוש כאמור חלה חובה לציין את מקור הפרסום.
4. הנך רשאי/ת להדפיס דפים מחומר הלימוד לצורכי לימוד, מחקר ועיון אישיים. אין להפיץ או למכור תדפיסים כלשהם מתוך חומר הלימוד.

מתמטיקה קדם אקדמית גיל אלון



מתמטיקה קדם אקדמית

כרך ב

שיעורים 8-5

גיל אלון

Basics of Mathematics

Vol. 2

צוות הפיתוח

כתיבה:

ד"ר גיל אלון

עריכה: אסנת אפרת

הגהה: דפי בר אילן

עימוד: דלית סלומון

עיצוב עטיפה: יעל עינת-ארדיטי

איור: רונית בורלא

זכויות יוצרים: אלכס ריפ

תמונות העטיפה: Svixx / Sylverarts Vectors / Shutterstock

מק"ט 95003-2029

מסת"ב 5-1716-06-965-978 ISBN

© תשפ"ד - 2024. כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

למזא - ספרי האוניברסיטה הפתוחה, הקריה ע"ש דורותי דה רוטשילד, דרך האוניברסיטה 1, ת"ד 808, רעננה 4353701.
Lamda - The Open University Books, The Dorothy de Rothschild Campus, 1 University Road, P.O.Box 808, Raanana 4353701. Printed in Israel.

אין לשכפל, להעתיק, לצלם, להקליט, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, לשדר או לקלוט בכל דרך או בכל אמצעי אלקטרוני, אופטי, מכני או אחר כל חלק שהוא מהחומר שבספר זה. שימוש מסחרי בחומר הכלול בספר זה אסור בהחלט, אלא ברשות מפורשת ובכתב ממדור זכויות יוצרים של האוניברסיטה הפתוחה.

תוכן עניינים לכרך ב

7	מבוא
9	שיעור 5: סדרות ואינדוקציה
9	סדרות של מספרים
12	סימן הסכימה המרובה
15	סימון המכפלה המרובה; סימון העצרת
16	סדרות חשבוניות
17	נוסחת הסכום של סדרה חשבונית
19	סדרות הנדסיות
21	נוסחת הסכום של סדרה הנדסית
24	הגדרה רקורסיבית של סדרות
26	אינדוקציה מתמטית
29	טענות על התחלקות מספרים שלמים
31	נוסחת הבינום
34	אינדוקציה החל ממקום מסוים
36	שיטת האינדוקציה השלמה
42	סיכום שיעור 5
43	שאלות להערכה עצמית
47	שיעור 6: פונקציות
50	פונקציות ממשיות
51	שימוש בתבניות מספר להגדרת פונקציות
52	מערכת הצירים הקרטזית
54	ייצוג גרפי של משוואות בשני משתנים
55	גרף של פונקציה
58	פונקציות קבועות
59	פונקציות לינאריות
64	פונקציות ריבועיות
69	פונקציות המוגדרות כ"הדבקה"
71	דוגמאות נוספות לפונקציות
75	פונקציה חד־חד־ערכית
77	צמצום של פונקציה
78	פונקציה על
80	תמונה של פונקציה
82	פונקציה זוגית/אי־זוגית
83	פונקציה עולה/יורדת
85	תחומי עלייה וירידה
87	פונקציות מונוטוניות
88	פונקציות מחזוריות

90	פעולות בפונקציות
90	פעולות חשבוניות בין פונקציות
91	הרכבת פונקציות
92	פונקציה הפוכה
94	פונקציה הפוכה לפונקציה ממשית
96	גרף הפונקציה ההפוכה
97	הזזה, מתיחה ושיקוף במקביל לצירים
101	סיכום שיעור 6
102	שאלות להערכה עצמית

103	שיעור 7: חזקות ולוגריתמים
103	חזקות ולוגריתמים
103	חזקות רציונליות
104	חזקות ממשיות
107	פונקציות מעריכיות
111	חוקי החזקות הממשיות
112	חוקי השורשים מסדר כללי
114	תכונות הפונקציה $f(x) = a^x$
116	משוואות מעריכיות
117	אי־שוויונות מעריכיים
119	הלוגריתם
120	חוקי הלוגריתמים
122	בסיסים מקובלים ללוגריתם
124	פונקציות לוגריתמיות
126	משוואות לוגריתמיות
127	אי־שוויונות לוגריתמיים
129	סיכום שיעור 7
130	שאלות להערכה עצמית

133	שיעור 8: מושגים בגאומטריה
134	מושגים יסודיים בגאומטריה של המישור
135	קרניים וקטעים
136	אורך ומרחק
137	זוויות
138	סוגי זוויות
139	זוויות קודקודיות ומשלמות
140	זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים
142	זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים
143	זוויות חד־צדדיות בין ישרים מקבילים
144	המשולש
147	מצולעים
150	סכום הזוויות במצולע קמור

151	מצולעים משוכללים
151	חפיפה – מבוא אינטואיטיבי
152	חפיפת מצולעים
154	חפיפת משולשים
157	משולש שווה-שוקיים
158	ישרים מאונכים; גובה במשולש
160	תיכון, חוצה זווית ואנך אמצעי
162	סוגי מרובעים
164	היקף של מצולע
164	מושג השטח
168	משפט פיתגורס
170	נוסחת הרון
172	דמיון – מבוא אינטואיטיבי
173	דמיון מצולעים
174	דמיון משולשים
176	מעגל
177	היקף המעגל
178	אורך הקשת; זווית מרכזית
179	מיתר במעגל
180	זווית היקפית
182	משיק למעגל
184	מצולע חסום במעגל
187	מעגל חסום במצולע
189	שטח העיגול
190	שטח של גיזרה מעגלית
191	סיכום שיעור 8
192	שאלות להערכה עצמית
195	סיכום הטענות והמשפטים בשיעור 8
201	פתרונות לשאלות בשיעור 5
230	פתרונות לשאלות בשיעור 6
265	פתרונות לשאלות בשיעור 7
286	פתרונות לשאלות בשיעור 8
307	סיכום הנוסחאות בכרך ב

מבוא

בשיעורים הקודמים למדנו את הטכניקה האלגברית הבסיסית ודרכי התמודדות עם אי־שוויונות. בתוך כך, התוודענו ליסודות החשיבה המתמטית: הכרנו את הלשון של תורת הקבוצות, ולמדנו דרכים שונות להוכחה של טענות. עמדנו על ההבחנה בין גרירה לוגית לשקילות, וראינו כיצד ניתן להוכיח טענות בהפרדה למקרים, ובכמה מקרים גם בדרך השלילה.

עמדנו על כוחה של המתמטיקה לתאר את העולם, כשפתרנו בעיות מילוליות מחיי היומיום. ובמידה רבה, ראינו כי המתמטיקה יוצרת עולם משל עצמה. למשל, הביטויים האלגבריים שבאמצעותם ניתחנו את תכונות המספרים הממשיים, התגלו כאובייקטים מתמטיים בעלי קיום עצמאי, שאפשר לחבר זה עם זה, להכפיל זה בזה וכן הלאה, על פי החוקים שהכרנו.

הקשר בין המתמטיקה, שהיא בעלת קיום מופשט ועצמאי, לבין העולם הממשי הוא דו־כיווני. מחד, תופעות בעולם הממשי מביאות לניסוחם של מושגים מתמטיים וניתוחם, ובעקבות כך לבנייתן של תיאוריות מתמטיות. העולם הממשי הוא אחד ממקורות ההשראה וההנעה של המתמטיקה. מאידך, יכולת הניתוח המתמטי מאפשרת יישומים רבים מספור בעולם, והמתמטיקה שזורה בכל פיתוח טכנולוגי, מדעי והנדסי שבנמצא.

בשיעורים שלפנינו נמשיך ללמוד את יסודות המתמטיקה מתוך אותה גישה של פיתוח לוגי שכבר הכרנו. במהלך הלימוד, כדאי לעצור מדי פעם ולוודא שפתרון התרגילים מבוסס על הבנה ולא על פעולה טכנית. בבואכם לכתוב הוכחה מתמטית, כדאי לחשוב עליה כעל טקסט שמיועד, בראש ובראשונה, לשכנע אתכם בנכונות הטענה. לאחר שתשתכנעו בנכונות הטענה בעצמכם, ייקל עליכם להעביר מידע זה הלאה. השתדלו תמיד לפרט באופן מילולי את המעברים הלוגיים שאתם מבצעים ואת הסיבות להם, בדומה לצורת הכתיבה של פתרונות לשאלות בספרים אלה.

הבנת הטענות והקשרים הלוגיים ביניהן תקל עליכם במשימה נוספת שהיא זכירה של החומר. ככלל, אין צורך לשנן נוסחאות בעל פה; אך השילוב של הבנה ותרגול יגרום לכם לזכור חלק גדול מהנוסחאות והטענות ללא מאמץ מיוחד, ויאפשר לכם לשחזר נוסחאות שאינכם זוכרים במידת הצורך. כך ייחסך מכם הצורך לדפדף ולחפש, והכלים השונים יהיו זמינים לשימושכם המידי.

שיעור 5

סדרות ואינדוקציה

סדרות של מספרים

החוקים המתמטיים שניסחנו בעבר, עירבו בדרך כלל מספר קטן של משתנים. לדוגמה, הכרנו את החוק הבא:

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

משמעותו המילולית של החוק היא: המספר הנגדי לסכום של שני מספרים, הוא סכום המספרים הנגדיים למספרים אלה.

כמסקנה מחוק זה, ניתן לנסח חוק דומה לגבי שלושה מספרים:

$$-(a + b + c) = (-a) + (-b) + (-c)$$

באופן דומה ניתן לנסח חוקים לגבי הנגדי לסכום של ארבעה מספרים, חמישה מספרים וכן הלאה. ובעצם כל החוקים הללו הם מקרים פרטיים של חוק כללי האומר כי הנגדי לסכום של מספר כלשהו של מספרים, שווה לסכום הנגדיים של מספרים אלה.

כיצד נוכל לנסח את החוק הכללי בצורה מתמטית?

לצורך כך נדרשת לנו אספקה בלתי מוגבלת של משתנים. מספר האותיות בכל אלפבית שנבחר לא יספיק לצורך כך. הפתרון לבעיה זו הוא יצירת שם משתנה שהוא שילוב של אות ומספר.

רשימה של n מספרים כלשהם מבוטאת כך:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$$

באופן זה, a_1 הוא משתנה בפני עצמו, a_2 משתנה בפני עצמו, וכן הלאה. בשיטת הרישום החדשה נבטא את החוק שאיתו התחלנו, כך:

$$-(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = (-a_1) + (-a_2) + \dots + (-a_n)$$

בשוויון זה n הוא מספר טבעי כלשהו, ו- $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ הם מספרים ממשיים כלשהם.

לרשימה ממוספרת כזו של מספרים ממשיים נקרא בשם **סדרה של מספרים ממשיים**, או בקיצור – **סדרה**. המספרים המופיעים בסדרה נקראים **איברי הסדרה**.

נבחין בין שני סוגים של סדרות:

- **סדרה סופית** – והיא סדרה מהצורה שפגשנו, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. בסדרה כזו יש מספר מוגדר ומוגבל של איברים: מספר האיברים הוא n .
- **סדרה אינסופית** – סדרה הנמשכת ללא הגבלה, ומסומנת כך: $a_1, a_2, a_3, \dots$

הנה דוגמאות לסדרות, סופיות ואינסופיות:

- הסדרה 1, 3, 5. בסדרה זו יש שלושה איברים: האיבר הראשון הוא $a_1 = 1$. האיבר השני הוא $a_2 = 3$. האיבר השלישי הוא $a_3 = 5$. סדרה זו היא סופית.
- סדרת המספרים הטבעיים: 1, 2, 3, 4, 5, ...
סדרה זו היא אינסופית, ולכן לא נוכל לכתוב את כל איבריה. האיבר הראשון בה הוא $a_1 = 1$. האיבר השני בה הוא $a_2 = 2$. האיבר ה-1000 בה הוא $a_{1000} = 1000$.
- סדרת המספרים הטבעיים הזוגיים: 2, 4, 6, 8, 10, ...
סדרה זו היא אינסופית.
- סדרת המספרים ההופכיים למספרים הטבעיים: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$
גם סדרה זו היא אינסופית.
- הסדרה 1, 3, 5, ..., 999
היא סדרת המספרים האי-זוגיים שבין 1 ל-999. סדרה זו היא סופית.
- סדרת הספרות של המספר $\sqrt{2} = 1.4142135\dots$. סדרה זו היא אינסופית.
עשרת האיברים הראשונים של הסדרה הם 1, 4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, 2

למספר המציין את מיקומו של איבר בתוך הסדרה קוראים **אינדקס**. למשל, האינדקס של a_1 הוא 1, האינדקס של a_5 הוא 5, והאינדקס של a_n הוא n .

אם נציב באינדקס הסדרה משתנה חדש, i , נקבל את הביטוי a_i שמייצג את **האיבר הכללי של הסדרה**. משמעות ביטוי זה היא שעל ידי הצבה של ערכים ספציפיים ($i = 1, i = 2$ וכן הלאה) נקבל את איברי הסדרה.

אחת הדרכים לתיאור סדרה היא באמצעות נוסחה הקובעת את האיבר הכללי שלה. הנה כמה דוגמאות:

- סדרת המספרים הטבעיים נתונה על ידי הנוסחה

$$a_i = i \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

- הסדרה 1, 3, 5 נתונה על ידי הנוסחה
נוודא זאת על ידי הצבה בנוסחה:

$$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 \quad \text{נציב } i=1 \text{ ונקבל}$$

$$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 \quad \text{נציב } i=2 \text{ ונקבל}$$

$$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5 \quad \text{נציב } i=3 \text{ ונקבל}$$

- סדרת המספרים הזוגיים נתונה על ידי הנוסחה

$$a_i = 2i \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

- סדרת ההופכיים למספרים הטבעיים $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ נתונה על ידי הנוסחה

$$a_n = \frac{1}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

◁ בסדרה זו בחרנו באות n לציון אינדקס הסדרה. ניתן להשתמש בכל אות שנבחר לציון אינדקס הסדרה וכן לציון הסדרה עצמה.

- נתבונן בסדרה הבאה:

$$a_n = n^2 - n + 1 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

נחשב כמה מאיברי הראשונים על ידי הצבת $n = 1, n = 2$ וכן הלאה בנוסחת האיבר הכללי:

$$a_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 - 2 + 1 = 3$$

$$a_3 = 3^2 - 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 4^2 - 4 + 1 = 13$$

- הסדרה האינסופית $a_n = 7 \quad n = 1, 2, 3, \dots$

היא סדרה אשר כל איבריה שווים ל-7. סדרה כזו נקראת **סדרה קבועה**.

שאלה 1

כתבו את איברי הסדרות הבאות:

א. $a_i = 3i + 1 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

ב. $b_i = i^2 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

ג. $c_j = 2^j \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$

ד. $d_j = (-1)^j \quad 1 \leq j \leq 6$

התשובה בעמוד 201

סימון הסכימה המרובה

בהינתן n איברים של סדרה, $a_1, \dots, a_n$, ניתן לייצג את סכומם כך:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

דרך נוספת להציג סכום כזה היא בעזרת סימון שהוצג על ידי המתמטיקאי הדגול לאונרד אוילר (Leonhard Euler, 1707-1783). סימון זה מבוסס על האות היוונית סיגמא גדולה: Σ .

$$\sum_{i=1}^n a_i \quad \text{הסימון הוא:}$$

בסימון זה, מופיע מתחת לסימן הסיגמא המשתנה i , הנקרא **משתנה הסכימה**, ומצוין ערכו הנמוך ביותר, שהוא 1. מעל לסימן הסיגמא מצוין ערכו הגבוה ביותר של משתנה הסכימה. מימין לסימן הסיגמא מופיע ביטוי האיבר הכללי של הסדרה. נאמר שביטוי זה נמצא **בתוך** סימן הסכימה.

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{מתקיים אפוא השוויון:}$$

לדוגמה, אם $a_i = i + 2$ אז

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^5 a_i &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\ &= (1 + 2) + (2 + 2) + (3 + 2) + (4 + 2) + (5 + 2) \\ &= 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 \end{aligned}$$

ניתן לציין בתוך סימן הסכימה את הביטוי הנסכם, מבלי להגדירו תחילה כסדרה.

$$\sum_{i=1}^5 (i + 2) \quad \text{באופן זה, ביטוי הסכום שבדוגמה האחרונה נראה כך:}$$

כדי לחשב סכום זה באופן ישיר, עלינו לעבור על כל הערכים של משתנה הסכימה i , הנמצאים בגבולות המותרים. עבור כל ערך כזה, יש להציב את ערך משתנה הסכימה בתוך הביטוי שבסיגמא, ולבסוף יש לחבר את המספרים המתקבלים.

- עבור $i = 1$ ערך הביטוי הוא: $1 + 2 = 3$
- עבור $i = 2$ ערך הביטוי הוא: $2 + 2 = 4$
- עבור $i = 3$ ערך הביטוי הוא: $3 + 2 = 5$
- עבור $i = 4$ ערך הביטוי הוא: $4 + 2 = 6$
- עבור $i = 5$ ערך הביטוי הוא: $5 + 2 = 7$

$$\sum_{i=1}^5 (i + 2) = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 25 \quad \text{בסך הכול נקבל:}$$

נדגים זאת בחישוב סכום נוסף:

$$\sum_{i=1}^4 i^2 = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{3} + \frac{4^2}{4} = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$$

ערכו של משתנה הסכימה אינו חייב להתחיל מ-1. ניתן, למשל, להתחיל מ- $i=3$:

$$\sum_{i=3}^5 i^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 9 + 16 + 25 = 50$$

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad \text{באופן כללי סימון הסכימה המרובה הוא:}$$

בסימון זה, i הוא משתנה הסכימה (כמובן ניתן להשתמש בכל אות שנבחר עבורו), m הוא הגבול התחתון של הסכימה ו- n הוא גבולה העליון. כדי לחשב סכום כזה, יש להציב כל ערך אפשרי של משתנה הסכימה, שהוא מספר שלם בין הגבול התחתון לגבול העליון של הסכימה, בתוך הביטוי שבסיגמא. לאחר מכן, יש לסכם את כל הערכים שהתקבלו.

הנה שתי דוגמאות נוספות:

$$\sum_{j=0}^3 (j+2) = (0+2) + (1+2) + (2+2) + (3+2) = 2 + 3 + 4 + 5 = 14 \quad \bullet$$

$$\sum_{j=2}^4 (a+j) = (a+2) + (a+3) + (a+4) = 3a + 9 \quad \bullet$$

שימו לב שבדוגמה האחרונה, a הוא פרמטר שנשאר קבוע במהלך הסכימה.

שאלה 2

חשבו את הסכומים הבאים:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} \sum_{i=1}^4 (3i) & \text{ב.} \sum_{j=0}^5 (j^2 + 1) & \text{ג.} \sum_{k=-2}^3 (k^2 - k) \\ \text{ד.} \sum_{i=1}^4 (a + bi) & \text{ה.} \sum_{i=1}^4 (1/i) & \end{array}$$

התשובה בעמוד 201

להלן כמה תכונות של סימון הסכום המרובה:

א. אם בתוך סימן הסיגמא מופיע סכום של שני ביטויים, ניתן לפצל סכום זה לסכום של שתי סיגמאות, לפי הנוסחה הבאה:

$$\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i$$

זהות זו נובעת מחוק החילוף בחיבור, כי:

$$\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \dots + (a_n + b_n)$$

$$\sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i = (a_m + a_{m+1} + \dots + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \dots + b_n)$$

ולכן הביטויים שבשני אגפי הזהות מתקבלים אחד מהשני על ידי שינוי סדר המחוברים.

ב. אם אותו גורם מופיע בכל המחוברים, ניתן להוציא אותו מחוץ לסימן הסיגמא, לפי הנוסחה הבאה:

$$\sum_{i=m}^n c a_i = c \sum_{i=m}^n a_i$$

זהות זו נובעת מחוק הפילוג:

$$\sum_{i=m}^n c a_i = c a_m + c a_{m+1} + \dots + c a_n = c(a_m + \dots + a_n) = c \sum_{i=m}^n a_i$$

◁ זו צורתו הכללית של הכלל שנדון בתחילת השיעור.

ג. ניתן להוציא סימן מינוס (-) מחוץ לסימן הסכימה:

$$\sum_{i=m}^n (-a_i) = - \sum_{i=m}^n a_i$$

זהות זו נובעת מהזהות שבסעיף ב בהצבה $c = -1$.

ד. אם הביטוי שבתוך סימן הסיגמא קבוע (כלומר אינו תלוי במשתנה הסכימה), הסכום שווה למכפלת מספר המחוברים בקבוע:

$$\sum_{i=m}^n c = (n - m + 1) \cdot c$$

שימו לב שמספר האינדקסים בין m ל- n הוא $n - m + 1$. לדוגמה, מספר המספרים השלמים שבין 10 ל-20 הוא $20 - 10 + 1 = 11$.

ה. ניתן לפצל סכום מרובה לשני סכומים מרובים, על ידי עצירה באינדקס מסוים בסכום הראשון, והמשך מהאינדקס הבא בסכום הבא:

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m}^k a_i + \sum_{i=k+1}^n a_i \quad (\text{לכל } m \leq k < n)$$

$$\sum_{i=m}^n a_i = \left(\sum_{i=m}^{n-1} a_i \right) + a_n = a_m + \sum_{i=m+1}^n a_i$$

בפרט, מתקיים:

שאלה 3

התשובה בעמוד 202

$$\sum_{i=1}^{100} a_i - \sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i=11}^{100} a_i \quad : a_1, a_2, \dots, a_{100}$$

הוכיחו, עבור סדרת מספרים

סימון המכפלה המרובה; סימון העצרת

בדומה לסימון הסכימה המרובה, נגדיר סימון עבור מכפלת איברי הסדרה $a_1, a_2, \dots, a_n$.

הסימון מבוסס על האות היוונית פאי גדולה (Π):

$$\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

כללית יותר, נסמן:

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

לדוגמה, נחשב את המכפלה הבאה:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^4 (i^2 - i + 1) &= \underbrace{(1^2 - 1 + 1)}_{i=1} \cdot \underbrace{(2^2 - 2 + 1)}_{i=2} \cdot \underbrace{(3^2 - 3 + 1)}_{i=3} \cdot \underbrace{(4^2 - 4 + 1)}_{i=4} \\ &= 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 = 273 \end{aligned}$$

כדוגמה נוספת, לכל a ממשי, אם נתבונן בסדרה הקבועה $a, a, a, \dots, a$ (n פעמים), נקבל

$$\prod_{i=1}^n a = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ פעמים}} = a^n$$

כעת נתבונן במכפלה הבאה:

$$\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

מכפלה זו נקראת n עצרת, ומסומנת כך: $n!$.

לדוגמה:

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \cdot 2 = 2$$

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

$$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

כפי שניתן לראות, איברי הסדרה $a_n = n!$ הולכים וגדלים במהירות רבה.

מסמנים גם:

$$0! = 1$$

ההסבר לסימון זה הוא שמכיוון ש- $n!$ הוא מכפלה של n איברים, הביטוי $0!$ מתאים למכפלה שאין בה איברים כלל – מכפלה הנקראת מכפלה ריקה. כל מכפלה ריקה מוגדרת כ-1 (האיבר הניטרלי בכפל). באופן דומה, סכום שאין בו איברים (הנקרא סכום ריק) מוגדר כ-0, האיבר הניטרלי בחיבור.

שאלה 4

חשבו:

התשובה בעמוד 202

$$\text{א. } \prod_{i=1}^3 i^2 \quad \text{ב. } \prod_{i=2}^4 \left(1 - \frac{1}{i}\right) \quad \text{ג. } \prod_{i=1}^{100} (i-5) \quad \text{ד. } \prod_{i=1}^3 i!$$

שאלה 5

הוכיחו כי לכל n טבעי מתקיים: $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$.
האם זהות זו נכונה גם עבור $n = 0$?

התשובה בעמוד 202

סדרות חשבוניות

נלמד עתה על סוג מסוים של סדרות, הנקראות סדרות חשבוניות.

הגדרה

סדרה (סופית או אינסופית) נקראת **סדרה חשבונית** אם ההפרש בין כל שני איברים סמוכים בה הוא קבוע.

לדוגמה, הסדרה הבאה היא סדרה חשבונית: 2, 5, 8, 11, 14, 17

ההפרש בין איברים סמוכים בסדרה זו הוא קבוע ושווה ל-3.

מקובל לסמן את ההפרש בין שני איברים סמוכים בסדרה חשבונית ב- d .

בסדרה חשבונית מתקיים אפוא התנאי:
כלומר: $a_{i+1} = a_i + d$

לכן מתקיים: $a_2 = a_1 + d$

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$$

$$\boxed{a_i = a_1 + (i-1)d}$$

ובאופן כללי, מתקיים לכל i

נוסחה זו היא **נוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית**.בהתאם לסימנו של d , נקבעת התנהגות הסדרה החשבונית:

- אם $d > 0$ אז הסדרה החשבונית עולה, כלומר, כל איבר (החל מהאיבר השני) גדול יותר מקודמו: $a_{i+1} > a_i$.
- אם $d = 0$ אז הסדרה החשבונית היא קבועה: $a_i = a_1$ לכל i .
- אם $d < 0$ אז הסדרה החשבונית יורדת, כלומר, כל איבר (החל מהאיבר השני) קטן יותר מקודמו: $a_{i+1} < a_i$.

$d < 0$ הוא קיצור למילה האנגלית difference, הפרש.

שאלה 6

א. בסדרה החשבונית $a_1, \dots, a_{10}$ מתקיים $a_1 = 5$, $a_{10} = 32$. מהו הפרש הסדרה?
 ב. נתונה סדרה חשבונית שאיברה הראשון הוא 11, איברה האחרון הוא -3, והפרשה הוא -2. כמה איברים יש בסדרה?

התשובה בעמוד 203

נוסחת הסכום של סדרה חשבונית

שאלה טבעית לגבי סדרה חשבונית $a_1, \dots, a_n$ היא: מהו סכום איברי הסדרה?

ניתן לבטא את הסכום כך:

$$\sum_{i=1}^n a_i$$

מקובל לסמן סכום זה על ידי S או S_n .

כדי לחשב את הסכום, נתייחס תחילה למקרה מסוים, והוא המקרה שבו הסדרה היא $1, 2, 3, \dots, n$, כלומר: $a_i = i$. במקרה זה הסכום שיש לחשב הוא:

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

ניתן לכתוב את אותו הסכום בסדר הפוך: $S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$

נחבר את שני השוויונות האחרונים:

$$2S = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \dots + (n+1)$$

כל אחד מהמחזורים בסכום האחרון שווה ל- $n+1$. בסכום יש n מחזורים, ולכן:

$$2S = n \cdot (n+1) \Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

מתקבלת הנוסחה:

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

נוסחה זו קשורה לסיפור מפורסם על המתמטיקאי קארל פרידריך גאוס (Carl Friedrich Gauss, 1777-1855). כשגאוס היה בבית הספר היסודי, המורה בכיתתו הטיל על התלמידים לחשב את סכום המספרים שבין 1 ל-100. המורה הניח שהמטלה תעסיק את התלמידים לזמן ממושך, והוא יוכל להתפנות לענייניו. אך גאוס הצביע והשיב מיידית: התשובה היא 5050. למורה הנדהם, הסביר גאוס כי ניתן לחלק את הסכום $1 + 2 + \dots + 100$ כך:

$$(1+100) + (2+99) + (3+98) + \dots + (50+51)$$

בסכום זה יש 50 מחזורים שכל אחד מהם שווה ל-101, ובסך הכול הסכום הוא $50 \cdot 101 = 5050$.

גם לפי הנוסחה הכללית שפיתחנו, מתקיים:

$$1 + 2 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$$

נחזור לבעיה הכללית של חישוב הסכום של סדרה חשבונית $a_1, a_2, \dots, a_n$.
נזכיר שבסדרה כזו, האיבר הכללי נתון על ידי הנוסחה
 $a_i = a_1 + (i - 1)d$
נבטא אותו כך:
 $a_i = a_1 - d + id$
אנו מעוניינים לחשב את הסכום

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (a_1 - d + id)$$

לצורך כך ניעזר בחוקי הסיגמאות (ראו בעמוד 13):

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n (a_1 - d + id) \\ &= \sum_{i=1}^n (a_1 - d) + \sum_{i=1}^n id \quad (\text{פיצול סיגמא של סכום לשתי סיגמאות}) \\ &= n(a_1 - d) + \sum_{i=1}^n id \quad (\text{סיכום של ביטוי קבוע}) \\ &= n(a_1 - d) + d \sum_{i=1}^n i \quad (\text{הוצאת הקבוע } d \text{ מחוץ לסכום, לפי חוק הפילוג}) \\ &= n(a_1 - d) + d \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{הצבת הנוסחה שהוכחנו קודם}) \\ &= n \left(a_1 - d + \frac{d(n+1)}{2} \right) \quad (\text{פישוט אלגברי}) \\ &= n \left(\frac{2a_1 - 2d + dn + d}{2} \right) = n \cdot \frac{2a_1 - d + dn}{2} \\ &= n \cdot \frac{a_1 + a_1 + (n-1)d}{2} = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} \end{aligned}$$

$$\boxed{S = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}}$$

קיבלנו את הנוסחה:

שני הביטויים שבנוסחה זו הם שימושיים. נוסחה זו נקראת **נוסחת הסכום של סדרה חשבונית**.

הביטוי $(a_1 + a_n)/2$ הוא ממוצע האיבר הראשון והאיבר האחרון בסדרה. הוכחנו אפוא:

סכום איברי סדרה חשבונית סופית שווה למכפלת מספר איברי הסדרה בממוצע האיבר הראשון והאחרון.

נדגים זאת בחישוב הסכום הבא: $10 + 13 + 16 + 19 + \dots + 40$
 המחברים בסכום זה הם סדרה חשבונית שאיברה הראשון הוא 10, איברה האחרון הוא 40, והפרשה הוא 3.
 נמצא את מספר איברי הסדרה, לפי נוסחת האיבר הכללי:

$$40 = 10 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

בסדרה יש 11 איברים; ממוצע האיבר הראשון והאחרון הוא $\frac{10 + 40}{2} = 25$

לכן סכום הסדרה הוא $S = 11 \cdot 25 = 275$.

שאלה 7

חשבו:

א. $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99$

ב. $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 75$

ג. סכום כל המספרים בין 1 ל-1000 שספרת היחידות שלהם היא 7.

התשובה בעמוד 203

שאלה 8

בכל אחד מהסעיפים נתונה סדרה חשבונית. מצאו את המידע המבוקש לגבי הסדרה, לפי הנתונים:

א. $S = 258, d = 3, a_1 = 5$. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

ב. $S = 715, d = -7, a_1 = 100$. מצאו את מספר האיברים בסדרה.

ג. $S = 31.5, n = 9, a_1 = 1$. מצאו את הפרש הסדרה.

התשובה בעמוד 204

שאלה 9

נחום שאל את הספר 'מלחמה ושלום' מהספריה העירונית, אך שכח להחזירו. עבור יום האיחור הראשון גובה הספריה קנס של שקל אחד. בכל יום גדל סכום הקנס היומי ב-10 אגורות, והקנסות היומיים נצברים. כעבור כמה ימים יעבור חובו של נחום לספריה את רף מאה השקלים, אם נחום ימשיך להחזיק את הספר ברשותו?

התשובה בעמוד 205

סדרות הנדסיות

סוג חשוב ונפוץ נוסף של סדרות הן סדרות הנדסיות, הנקראות גם סדרות גיאומטריות.

הגדרה

סדרה (סופית או אינסופית) נקראת **סדרה הנדסית** אם היחס (כלומר, המנה) בין כל שני איברים סמוכים בה הוא קבוע.

מקובל לסמן את היחס הקבוע בסדרה הנדסית באות q (קיצור המילה: quotient, מנה).

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = q \quad \text{בסדרה הנדסית מתקיים אפוא לכל } i,$$

$$a_{i+1} = a_i \cdot q \quad \text{ולכן:}$$

$$a_2 = a_1 \cdot q \quad \text{מכאן מתקבל, בפרט:}$$

$$a_3 = a_2 \cdot q = a_1 q \cdot q = a_1 q^2$$

$$a_4 = a_3 \cdot q = a_1 q^2 \cdot q = a_1 q^3$$

$$\boxed{a_i = a_1 q^{i-1}} \quad \text{ובאופן כללי, לכל } i:$$

נוסחה זו היא **נוסחת האיבר הכללי בסדרה הנדסית**.

הנה כמה דוגמאות לסדרות הנדסיות:

- הסדרה 1, 10, 100, 1000 : המנה של סדרה זו היא 10.
- הסדרה 2, $2\sqrt{2}$, 4, $4\sqrt{2}$, 8 : המנה של סדרה זו היא $\sqrt{2}$.
- הסדרה 48, 24, 12, 6, 3 : המנה היא $1/2$.
- הסדרה 2, -6, 18, -54 : המנה היא -3.

דוגמה נפוצה למצב שבו נוצרת סדרה הנדסית היא בחישובי ריבית דריבית. נתבונן בשאלה הבאה:

אדם מפקיד 1000 שקלים בתוכנית חיסכון. בכל חודש, מעניק הבנק ריבית של 0.2% על היתרה הקיימת בתוכנית. מה תהיה היתרה כעבור שנתיים?

$$r = 0.2\% = \frac{0.2}{100} = 0.002 \quad \text{נסמן ב-} r \text{ את שיעור הריבית:}$$

אם בתחילתו של חודש מסוים היתרה היא a , הרי שבסופו של החודש מוענקת ריבית בסך

$$a + ra = a(1 + r) \quad \text{והיתרה היא } r \cdot a$$

$$q = 1 + r \quad \text{נסמן אפוא:}$$

מהאמור לעיל עולה שהיתרה בכל חודש מוכפלת פי q .

$$1000 \cdot q \quad \text{לאחר החודש הראשון, היתרה היא:}$$

$$1000 \cdot q \cdot q = 1000q^2 \quad \text{לאחר חודשיים, היתרה היא}$$

:

$$1000 \cdot q^i \quad \text{לאחר } i \text{ חודשים, היתרה היא}$$

נסמן ב- a_i את היתרה בתום i חודשים. ראינו כי:

$$a_i = 1000q^i = 1000q \cdot q^{i-1}$$

לכן הסדרה $a_1, a_2, \dots$ היא סדרה הנדסית.

כדי למצוא את היתרה כעבור שנתיים, נציב $i=24$ (כי שנתיים = 24 חודשים), ונקבל:

$$a_{24} = 1000 \cdot q^{24} = 1000 \cdot 1.002^{24} \approx 1049.12$$

לאחר שנתיים יהיו בחיסכון כ-1049 שקלים.

שאלה 10

קבעו לגבי כל אחת מהסדרות אם היא סדרה הנדסית או לא. במקרה שהסדרה הנדסית, מצאו את מנתה.

א. 1, 2, 3

ב. 1, 2, 4, 8

ג. 3, 1.5, 0.75, 0.375

ד. 1, -2, 4, -8

ה. 5, 5, 5, 5

ו. 0, 0, 0, 0

התשובה בעמוד 206

שאלה 11

לדנה יש חוב של 1000 שקלים לבנק. בכל חודש שבו לא משולם החוב, נצברת ריבית של 10% על סכום החוב הקיים. מה יהיה החוב בעוד חצי שנה, אם לא ישולם?

התשובה בעמוד 206

נוסחת הסכום של סדרה הנדסית

בהינתן סדרה הנדסית $a_1, a_2, \dots, a_n$, נרצה לחשב את סכומה:

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

דרך החישוב שנציג עושה שימוש בתחבולה נאה.

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$\vdots$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \quad \text{לכן}$$

$$Sq = a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \quad \text{נכפיל את השוויון ב-} q:$$

אם נשווה בין הביטוי ל- Sq לבין הביטוי ל- S , נראה שכמעט כל המחוברים זהים בשני הסכומים. בביטוי של Sq מופיעים כל המחוברים בביטוי של S , למעט המחובר a_1 ; בנוסף, מופיע המחובר a_1q^n . לכן:

$$Sq = S - a_1 + a_1q^n$$

נניח מעתה ש- $q \neq 1$, ונחלץ את S מהשוויון שקיבלנו:

$$\begin{aligned} Sq - S &= a_1 q^n - a_1 \\ \Rightarrow S(q - 1) &= a_1(q^n - 1) \\ \Rightarrow S &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

הנוסחה האחרונה היא **נוסחת הסכום של סדרה הנדסית**.

הערה: אם $q = 1$, הסדרה היא קבועה וקל מאוד לחשב את סכומה:

$$S = \underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_n = na_1$$

נדגים את השימוש בנוסחת הסכום:

$$3 + 9 + \dots + 3^{100} = \sum_{i=1}^{100} 3^i \quad \text{א. נחשב את הסכום:}$$

הסדרה $3, 9, \dots, 3^{100}$ היא סדרה הנדסית שאיברה הראשון הוא 3, מנתה היא $q = 3$, ומספר איבריה הוא 100. סכומה הוא אפוא:

$$S = 3 \cdot \frac{3^{100} - 1}{3 - 1} = \frac{3}{2}(3^{100} - 1)$$

המספר המתקבל הוא עצום בגודלו, לכן לא נכתוב אותו כאן במפורש.

ב. **האגדה על ממציא השחמט.** אגדה ידועה מספרת על קיסר סין שהזמין את ממציא משחק השחמט אליו לארמון. הוא אמר לו: "המצאתך המופלאה שיפרה את חיי האזרחים והעלתה את קרנה של ארץ סין בעיני כל האומות. נקוב נא את שכרך; אל תהיה צנוע. אמור מה משאלתך ואמלאנה". הממציא הזקן הוציא לוח שחמט והשיב לקיסר: "על המשבצת הראשונה של לוח השח הייתי רוצה שתניח גרגר אורז אחד". "גרגר אורז?" התפלא הקיסר. "כן, השיב הזקן. ועל המשבצת הבאה ארצה שני גרגרים". "האם אתה רוצה להעליב אותי?" אמר הקיסר בתמיהה ובכעס. "חלילה לי מלעשות כן, הוד רוממותו", השיב הזקן. "אנא שמע את בקשתי. ובכן על המשבצת השלישית אבקש שתניח ארבעה גרגרים, על הרביעית – שמונה, וכן הלאה. בעד כל משבצת של לוח השח אבקש כפליים מהמשבצת הקודמת". "נו טוב", רגז הקיסר. "איזה זקן תמהוני ושוטה. תקבל את שק האורז שלך מחר בבוקר". הקיסר הורה לעוזריו לחשב במדויק את כמות האורז שיקבל הזקן. אך עד מהרה התברר שלא יהיה קל למלא את דרישת הזקן. עוזרי הקיסר חישובו בקדחתנות את מספרי הגרגרים שיידרשו לכל משבצת וסיכמו את המספרים. כבר במחצית הלוח, עבור 32 המשבצות הראשונות, התברר כי יידרשו כמאה טונות של אורז. מכאן המצב הלך והידרדר במהירות: כל משבצת דרשה הררים של אורז, בקצב הולך וגובר. עם עלות השחר, סיימו עוזרי הקיסר לסכם את כמות האורז הנדרשת: התגלה כי נדרשים כחצי מיליון מיליוני טונות של אורז, כמות שגם אם יירתמו כל שדות

האורז שבעולם להפקתה, יידרשו אלפי שנים לגידולה. הקיסר נאלץ להודות בתבוסתו, ולהכיר בחוכמתו של אותו זקן.

גם אנו לא נוכל לספק את כמות האורז שבסיפור, אך נוכל לחשב בקלות יחסית את מספר הגרגרים הנדרשים.

$1 = 2^0$	מספר הגרגרים שנדרשו עבור המשבצת ה-1:
$2 = 2^1$	מספר הגרגרים שנדרשו עבור המשבצת ה-2:
$4 = 2^2$	מספר הגרגרים שנדרשו עבור המשבצת ה-3:
$8 = 2^3$	מספר הגרגרים שנדרשו עבור המשבצת ה-4:
$\vdots$	
2^{63}	מספר הגרגרים שנדרשו עבור המשבצת ה-64:

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63} = \sum_{i=1}^{64} 2^{i-1} \quad \text{סך הגרגרים שנדרשו:}$$

נחשב את הסכום בעזרת נוסחת הסכום לסדרה הנדסית ($a_1 = 1, q = 2, n = 64$):

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{63} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

$$= 18,446,744,073,709,551,615 \approx 18 \cdot 10^{18} = 18 \cdot 10^9 \cdot 10^9$$

מספר הגרגרים הוא כ-18 מיליארד מיליארדים.

נשים לב שבאופן כללי, מתקיים:

$$1 + 2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

שוויון זה נובע מנוסחת הסכום לסדרה הנדסית.

ג. חישובי ריבית דריבית.

נניח שאדם מפקיד בכל חודש a שקלים בתוכנית חיסכון, הנושאת ריבית מצטברת בשיעור r . בתום כל חודש, הבנק מוסיף לחשבון את הריבית שנצברה על כל הסכום (הקרן והריבית שנצברה בעבר).

נחשב כמה כסף ייצבר בחשבון בכל שלב. נסמן, כמקודם, $q = 1 + r$.

בתחילת החודש הראשון, מופקדים a שקלים, ולכן היתרה היא a .

בתום החודש הראשון נצברת הריבית, והיתרה היא: $a + ra = a(1 + r) = aq$.

בתחילת החודש השני מופקדים a שקלים נוספים, והיתרה היא $aq + a$.

בתום החודש השני נצברת הריבית, והיתרה היא $(aq + a) \cdot q = aq^2 + aq$.

בתחילת החודש השלישי מופקדים a שקלים נוספים, והיתרה היא $aq^2 + aq + a$. בתום החודש השלישי נצברת הריבית, והיתרה היא:

$$(aq^2 + aq + a) \cdot q = aq^3 + aq^2 + aq$$

באופן כללי, כמות הכסף שתיצבר בחשבון לאחר n חודשים היא:

$$aq^n + aq^{n-1} + \dots + aq^2 + aq$$

הסכום בביטוי שהתקבל הוא סכום של סדרה הנדסית שמנתה היא q . לפי הנוסחה לסכום סדרה הנדסית:

$$\begin{aligned} aq^n + aq^{n-1} + \dots + aq^2 + aq &= aq + aq^2 + \dots + aq^n \\ &= aq \frac{q^n - 1}{q - 1} = a(1 + r) \frac{(1 + r)^n - 1}{r} \end{aligned}$$

לדוגמה, אם סכום ההפקדה החודשי הוא 100 שקלים והריבית החודשית היא 0.5%, כעבור 5 שנים (שהן 60 חודשים) ייצבר הסכום:

$$100 \cdot 1.005 \cdot \frac{1.005^{60} - 1}{0.005} \approx 7011.89$$

בסך הכול תתקבל ריבית של כ-1011 שקלים על הפקדה כוללת של 6000 שקלים.

שאלה 12

א. הוכיחו: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = 2 - \frac{1}{2^{10}}$

התשובה בעמוד 206

ב. חשבו: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{10}}$

שאלה 13

זוג צעיר לוקח משכנתא בסך a שקלים. בכל חודש, הזוג משלם b שקלים, והבנק גובה ריבית בשיעור r על יתרת החוב. ריבית זו מתווספת אל החוב הקיים. מצאו נוסחה המבטאת את החוב שנותר לאחר n חודשים.

התשובה בעמוד 207

הגדרה רקורסיבית של סדרות

נתבונן בסדרה המוגדרת כך:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_{n+1} &= a_n^2 - 5 \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

במבט ראשון ההגדרה נראית תמוהה: איך אפשר להגדיר סדרה בעזרת עצמה?

אך מסתבר שנוסחאות אלה קובעות את איברי הסדרה ביחידות: אנו יודעים כבר ש- $a_1 = 3$. כדי למצוא את a_2 , נציב $n = 1$ בנוסחה השנייה של ההגדרה:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1^2 - 5 \\ a_2 &= 3^2 - 5 = 4 \end{aligned} \quad \text{לכן}$$

כעת נציב $n = 2$ באותה נוסחה, ונקבל:

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2^2 - 5 \\ a_3 &= 4^2 - 5 = 11 \end{aligned} \quad \text{לכן,}$$

כך נוכל להמשיך ולחשב את a_5, a_4 וכן הלאה. ערכו של כל איבר בסדרה, החל מהאיבר השני, נקבע לפי ערכו של האיבר שלפניו. כך מוגדרת הסדרה באופן חד־משמעי.

הגדרה מסוג זה נקראת **הגדרה רקורסיבית**. בשיטת הגדרה זו, מגדירים תחילה את האיבר הראשון בסדרה, או כמה איברים ראשונים בה. לאחר מכן, כל איבר מוגדר בהסתמך על האיברים שלפניו. הנוסחה שבאמצעותה מגדירים את האיברים בעזרת קודמיהם נקראת **נוסחת רקורסיה**.

דוגמה מפורסמת לסדרה שהגדרתה רקורסיבית היא **סדרת פיבונאצ'י** (Fibonacci). סדרה אינסופית זו, שאיבריה מסומנים $F_1, F_2, F_3, \dots$ מוגדרת כך:

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 \\ F_2 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \quad n = 3, 4, 5, \dots \end{aligned}$$

◁ סדרה זו הוגדרה לראשונה בידי המתמטיקאי האיטלקי ליאונרדו מפזיה (~1170–~1250), אשר נודע גם בשם פיבונאצ'י. ליאונרדו היה אחד הראשונים להביא את בשורת הכתיב העשרוני ההודו־ערבי לאירופה, והוא פרסם אותו בספרו Liber Abaci (ספר החישוב). הגדרת סדרת פיבונאצ'י פורסמה בספר זה, במסגרת חידה על קצב ההתרבות של אוכלוסיית ארנבות.

כלומר, שני האיברים הראשונים שווים ל־1, וכל איבר החל מהאיבר השלישי שווה לסכום שני האיברים שלפניו בסדרה.

$$\begin{aligned} F_3 &= F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2 \\ F_4 &= F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3 \\ F_5 &= F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5 \end{aligned} \quad \text{נחשב כמה איברים ראשונים של הסדרה:}$$

שאלה 14

חשבו את עשרת האיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י.

התשובה בעמוד 207

שאלה 15

חשבו את חמשת האיברים הראשונים בכל אחת מהסדרות הבאות:

א. $a_1 = 10$

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad n \geq 1$$

ב. $a_1 = 3, a_2 = 4$

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 1 \quad n \geq 1$$

ג. $a_1 = 2$

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad n \geq 1$$

ד. $a_1 = 1$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_n) \quad n \geq 1$$

התשובה בעמוד 208

שאלה 16

מצאו הגדרות רקורסיביות לסדרות הבאות:

$$a_n = 5n + 3 \quad n \geq 1 \quad \text{א.}$$

$$a_n = 3 \cdot 2^n \quad n \geq 1 \quad \text{ב.}$$

התשובה בעמוד 209

אינדוקציה מתמטית

נציג עתה שיטה חשובה להוכחת טענות לגבי מספרים שלמים, הנקראת **שיטת האינדוקציה**.

נתבונן, לדוגמה, באי־שוויון הבא:

$$2^n > n$$

נניח שברצוננו להוכיח את האי־שוויון לכל n טבעי, כלומר ל־ $n = 1, 2, 3, \dots$ נבדוק תחילה, שהאי־שוויון מתקיים עבור $n = 1$:

$$2^1 > 1 \quad \text{ולכן} \quad 2^1 = 2$$

כעת נניח, לרגע, שהטענה שברצוננו להוכיח מתקיימת עבור n מסוים:

$$2^n > n$$

ננסה להגיע למסקנות מהנחה זו. נכפול את שני אגפי האי־שוויון ב־2:

$$2 \cdot 2^n > 2n$$

$$2^{n+1} > 2n$$

לפי חוקי החזקות נקבל:

$$2n = n + n \geq n + 1 \quad \text{לכן} \quad n \geq 1, \text{ ומכאן}$$

$$2^{n+1} > n + 1 \quad \text{לכן:}$$

הוכחנו שאם $2^n > n$ אז $2^{n+1} > n + 1$, כלומר: אם הטענה שברצוננו להוכיח מתקיימתעבור n מסוים, אז היא מתקיימת גם עבור $n + 1$.משילוב שתי הטענות ביחד: $2^1 > 1$ וגם $2^n > n \Rightarrow 2^{n+1} > n + 1$, נקבל את נכונותהטענה $2^n > n$ לכל n , באופן הבא:

$$\text{מכך ש־} 2^1 > 1 \text{ נסיק ש־} 2^2 > 2;$$

$$\text{מכך ש־} 2^2 > 2 \text{ נסיק ש־} 2^3 > 3;$$

$$\text{מכך ש־} 2^3 > 3 \text{ נסיק ש־} 2^4 > 4;$$

וכך ניתן להמשיך ככל שנרצה.

לכן, $2^n > n$ לכל n טבעי.

מדוגמה זו נוכל לנסח עיקרון כללי, הנקרא **עיקרון האינדוקציה**:

עיקרון האינדוקציה

תהי $P(n)$ טענה התלויה במספר טבעי n .

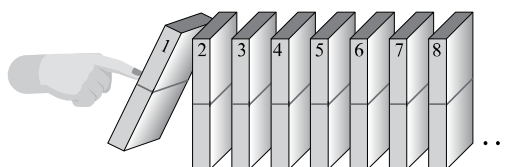
אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. הטענה $P(1)$ נכונה.

ב. לכל n טבעי, אם $P(n)$ נכונה אז $P(n+1)$ נכונה.

אז הטענה $P(n)$ נכונה לכל n .

ניתן לדמות את שיטת ההוכחה בדרך האינדוקציה לתהליך של הפלת אבני דומינו: נדמיין שורה אינסופית של אבני דומינו. דחיפת האבן הראשונה גורמת להפלת האבן השנייה, שמפילה את האבן השלישית, וכן הלאה. ניתן לדעת בבטחה שכל אבן תיפול במוקדם או במאוחר.



הוכחה המבוססת על עיקרון האינדוקציה מתבצעת בדרך כלל במבנה הבא:

א. מוודאים את נכונות הטענה $P(1)$ (שלב זה נקרא **בסיס האינדוקציה**).

ב. מניחים את נכונות הטענה $P(n)$ (הנחה זו נקראת **הנחת האינדוקציה**).

ג. תוך שימוש בהנחה, מוכיחים את נכונות הטענה $P(n+1)$.

שלבם ב-ר'ג נקראים **צעד האינדוקציה**.

שיטת האינדוקציה מאפשרת להוכיח באופן פורמלי ומלא טענות שכבר הכרנו בעבר, אך הוכחתן לא היתה שלמה. בנוסף, השיטה מאפשרת להוכיח טענות חדשות שקשה להוכיח בדרך אחרת. נראה זאת בדוגמאות ובשאלות שבהמשך.

כדוגמה ראשונה, נוכיח את הטענה הבאה: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

כזכור, נוסחת הסכום של סדרה חשבונית מבוססת על טענה זו.

נבדוק את נכונות הטענה עבור $n = 1$: $1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$

◁ זו הנחת האינדוקציה.

נניח שהטענה נכונה עבור n מסוים, כלומר: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

נוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר נוכיח שמתקיים:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

הנה ההוכחה:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \quad (\text{לפי הנחת האינדוקציה}) \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \end{aligned}$$

וידאנו שהטענה נכונה עבור $n + 1$, ובכך סיימנו את צעד האינדוקציה ואת הוכחת הטענה. $\square$

הערה: דרך נוספת ומקובלת לכתוב את צעד האינדוקציה היא:

עבור מספר טבעי k , מוכיחים שאם הטענה נכונה עבור $n = k$ אז הטענה נכונה עבור $n = k + 1$.

לדוגמה, ביחס לטענה שהוכחנו $(1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2})$, נציב $n = k$ בטענה:

$$1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k + 1)}{2}$$

זוהי הנחת האינדוקציה.

$$1 + 2 + \dots + (k + 1) = \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} \quad \text{נציב } n = k + 1 \text{ בטענה:}$$

זו הטענה שמוכיחים בצעד האינדוקציה, בהתבסס על הנחת האינדוקציה.

שאלה 17

התשובה בעמוד 209

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \quad \text{הוכיחו כי לכל } n \text{ טבעי מתקיים:}$$

שאלה 18

א. יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים ממשיים. הוכיחו כי מתקיים:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$$

התשובה בעמוד 210

$$|a^n| = |a|^n \quad \text{ב. הסיקו את הזהות:}$$

שאלה 19

התשובה בעמוד 211

הוכיחו בשיטת האינדוקציה את נוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

שאלה 20

הוכיחו את האי־שוויון הבא, הנקרא **אי־שוויון ברנולי**:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx \quad \text{לכל } x \geq -1, \text{ ולכל } n \text{ טבעי מתקיים}$$

◁ על שמו של המתמטיקאי

השוויצרי יעקב ברנולי (1654–1705)

הערה: שימו לב שבשאלה לעיל יש שני משתנים: מספר טבעי n , ומספר ממשי $x \geq -1$.

בהוכחה באינדוקציה של טענה מסוג זה חשוב לזכור איזהו המשתנה שעליו מתבצעת האינדוקציה (במקרה זה: המשתנה n). משתנה זה נקרא **משתנה האינדוקציה**. כמובן, לא

נוכל לבצע אינדוקציה על משתנה המקבל ערכים שאינם שלמים, כמו x שבשאלה.

התשובה בעמוד 211

טענות על התחלקות מספרים שלמים

אחד התחומים שהאינדוקציה יפה להם לעתים קרובות הוא בעיות התחלקות. בעיות אלה עוסקות בהתחלקות ללא שארית של מספרים שלמים. להלן מספר הגדרות וטענות בנושא זה.

הגדרה – התחלקות

יהיו a ו- d מספרים שלמים.

נאמר כי a מתחלק ב- d אם ניתן להציג את a בצורה $a = qd$, כש- q הוא מספר שלם.

במצב זה נאמר גם ש- a הוא כפולה שלמה של d . נסמן זאת כך: $d \mid a$.

אם a אינו מתחלק ב- d , נסמן זאת כך: $d \nmid a$.

הערה: המונח "מתחלק" הוא קיצור של המונח "מתחלק ללא שארית" שהכרנו בעבר.

לדוגמה:

- 20 מתחלק ב-4, כי $20 = 5 \cdot 4$. בסימון מתמטי: $4 \mid 20$.
- כל מספר שלם מתחלק ב-1, כי לכל a מתקיים $a = a \cdot 1$.
- כל מספר שלם מתחלק בעצמו, כי לכל a מתקיים $a = 1 \cdot a$.
- 0 מתחלק בכל מספר, כי לכל d מתקיים $0 = 0 \cdot d$.
- המספרים המתחלקים ב-2 הם המספרים הזוגיים:
..., -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, ...

טענה

יהיו a, b, d מספרים שלמים.

- אם $d \mid a$ וגם $d \mid b$ אז $d \mid a + b$ (במילים: אם שני מספרים מתחלקים במספר מסוים, אז גם סכומם מתחלק באותו המספר).
- אם $d \mid a$ אז $d \mid ab$ (במילים: אם מספר מתחלק במספר מסוים, אז כל כפולה שלו מתחלקת באותו המספר).
- נניח ש- $d \neq 0$. אז $d \mid a \Leftrightarrow a/d \in \mathbb{Z}$ (במילים: מספר מתחלק במספר אחר אם ורק אם תוצאת החלוקה שלו באותו המספר היא מספר שלם).

לפני הוכחת הטענה, נראה דוגמאות לכל חלקיה:

- המספרים 6 ו-9 מתחלקים ב-3. לפי הטענה, גם סכומם מתחלק ב-3. ואכן: $6+9=15$ ו- $3 \mid 15$.
- המספר 6 מתחלק ב-3. לפי הטענה, גם המספר $7 \cdot 6$ מתחלק ב-3. ואכן: $7 \cdot 6 = 42$ ו- $3 \mid 42$.
- לפי הטענה, כדי לבדוק אם $3 \mid 12$, די לבדוק אם המנה $12/3$ היא מספר שלם; ואכן מתקיים ש- $12/3 = 4$ הוא מספר שלם, ובהתאם לכך, 12 מתחלק ב-3.
לעומת זאת, המספר $5/3 = 1\frac{2}{3}$ אינו שלם, ובהתאם לכך, 5 אינו מתחלק ב-3 (בסימון מתמטי: $3 \nmid 5$).

הוכחת הטענה

א. נניח ש- $d \mid a$ וגם $d \mid b$. לפי הגדרת ההתחלקות, ניתן לבטא $a = qd$ ו- $b = q'd$,
כש- q ו- q' הם מספרים שלמים. מחיבור שני השוויונות נקבל:

$$a + b = qd + q'd = (q + q')d$$

לכן גם המספר $a + b$ הוא כפולה של d במספר שלם, כלומר $d \mid a + b$.

ב. נניח ש- $d \mid a$. אז ניתן לבטא $a = qd$ כש- q הוא מספר שלם.

$$ab = qdb = (qb) \cdot d$$

נכפיל את השוויון ב- b :

לכן גם המספר ab הוא כפולה של d , כלומר $d \mid ab$.

ג. נוכיח את שני הכיוונים:

כיוון ראשון – נוכיח כי אם $d \mid a$ אז a/d מספר שלם. לפי הגדרת ההתחלקות, מכך
ש- $d \mid a$ נובע שניתן להציג $a = qd$ כש- q הוא מספר שלם. נחלק שוויון זה ב- d ,
ונקבל: $a/d = q$. לכן a/d שלם.

כיוון שני – נוכיח כי אם a/d מספר שלם אז $d \mid a$. ואכן, בהנחה ש- a/d שלם, נסמן
 $q = a/d$. נכפיל שוויון זה ב- d , ונקבל $a = qd$. לפי ההנחה, q מספר שלם. לכן $d \mid a$.

□

שאלה 21

בדקו אם מתקיים:

- | | | |
|----------------|----------------|----------------|
| א. $2 \mid 5$ | ב. $7 \mid 10$ | ג. $8 \mid 24$ |
| ד. $2 \mid -6$ | ה. $10 \mid 5$ | ו. $-1 \mid 8$ |

התשובה בעמוד 211

שאלה 22

הוכיחו:

- א. אם $d \mid a$ וגם $d \mid b$ אז $d \mid a - b$.
ב. אם $d \mid a$ ו- c מספר שלם כלשהו, אז $dc \mid ac$.
ג. אם $a \mid b$ ו- $b \mid c$ אז $a \mid c$.

התשובה בעמוד 212

כעת, משהכרנו את התכונות הבסיסיות של ההתחלקות, נראה כיצד ניתן להוכיח טענות
מסוימות על התחלקות בשיטת האינדוקציה.

טענה

לכל n טבעי מתקיים $2 \mid n^2 + n$.

הוכחה

נבדוק את הטענה במקרה $n = 1$: במקרה זה $2 = 1^2 + 1 = n^2 + n$, ואכן מתקיים
 $2 \mid n^2 + n$.

כעת נניח שהטענה מתקיימת עבור n טבעי מסוים, כלומר $2 \mid n^2 + n$, ונוכיח שהיא
מתקיימת עבור $n + 1$, כלומר $2 \mid (n + 1)^2 + (n + 1)$.

נפשט:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 + n + 1 &= n^2 + 2n + 1 + n + 1 = n^2 + n + 2n + 2 \\ &= n^2 + n + 2(n+1)\end{aligned}$$

המספר $n^2 + n$ מתחלק ב-2, לפי הנחת האינדוקציה.

המספר $2(n+1)$ מתחלק ב-2, לפי הגדרת ההתחלקות.

לפי תכונות ההתחלקות שהוכחנו, הסכום $n^2 + n + 2(n+1)$ מתחלק ב-2, ומכאן

$$\square \quad 2 \mid (n+1)^2 + (n+1)$$

נסו את כוחכם בהוכחת טענות דומות:

שאלה 23

הוכיחו באינדוקציה את הטענות הבאות:

א. לכל n טבעי, $6 \mid n^3 - n$.

ב. לכל n טבעי, $3 \mid 4^n - 1$.

ג. לכל n טבעי, $30 \mid 3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n$.

ד. לכל n טבעי, $30 \mid 8^n - 5^n - 3^n$.

התשובה בעמוד 212

נוסחת הבינום

נכיר עתה זהות חשובה, המשלימה זהויות שלמדנו בשיעור השני, והוכחתה היא באינדוקציה.

נחפש נוסחה עבור הביטוי $(a+b)^n$, כש- a ו- b מספרים ממשיים, ו- n מספר טבעי.

$$(a+b)^1 = a+b \quad \text{לפי הגדרת החזקה, מתקיים כמובן:}$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{לפי נוסחאות הכפל המקוצר:}$$

ולפי נוסחאות הכפל המקוצר ממעלה שלישית:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

נפתח זהות דומה עבור הביטוי $(a+b)^4$:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b) \cdot (a+b)^3 = (a+b)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= a(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + b(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ &\quad + a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

ניתן לראות כי בנוסחה ל- $(a+b)^n$ מופיעים המחוברים $a^n, a^{n-1}b, \dots, a^1b^{n-1}, b^n$, כלומר

כל הביטויים מהצורה $a^{n-i}b^i$ עבור $0 \leq i \leq n$, כשלפני כל מחובר מופיע מקדם מספרי.

כדי להבין את החוקיות שעל פיה מתנהגים המקדמים, נעיין בדיאגרמה הבאה, הנקראת **משולש פסקל**:

◁ על שם בלז פסקל (Blaise Pascal, 1623-1662), מתמטיקאי, פיזיקאי ופילוסוף צרפתי.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & 1 & & 1 \\
 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 &
 \end{array}$$

בדיאגרמה זו, המספרים הקיצוניים בכל שורה הם 1, וכל מספר שאינו קיצוני בשורתו שווה לסכום שני המספרים שמעליו. כפי שניתן לראות, המספרים במשולש פסקל הם בדיוק המקדמים בפיתוח הביטוי $(a + b)^n$:

$$\begin{aligned}
 (a + b)^0 &= 1 \\
 (a + b)^1 &= 1 \cdot a^1 + 1 \cdot b^1 \\
 (a + b)^2 &= 1 \cdot a^2 + 2ab + 1 \cdot b^2 \\
 (a + b)^3 &= 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3 \\
 (a + b)^4 &= 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1 \cdot b^4
 \end{aligned}$$

בדרך זו, נוכל להיעזר במשולש פסקל כדי לשחזר את הנוסחה ל- $(a + b)^n$ בכל עת שבה היא תידרש, ולכל ערך של n .

שאלה 24

התשובה בעמוד 214

היעזרו במשולש פסקל כדי למצוא נוסחה עבור הביטוי $(a + b)^5$.

המספרים במשולש פסקל נקראים **מקדמים בינומיים**. השורות במשולש פסקל ממוספרות החל מ-0, וכך גם המקום בתוך כל שורה. המספר במקום ה- i בשורה ה- n במשולש פסקל מסומן כך: $\binom{n}{i}$ (בשפת הדיבור: n מעל i). לדוגמה, המספרים בשורה מספר 3 במשולש פסקל הם

$$\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1$$

הנוסחה הבאה מאפשרת לחשב את המקדמים הבינומיים באופן ישיר:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

◁ זכרו את הגדרת העצרת: $k! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k$. ראו פירוט בעמוד 15.

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{120}{2 \cdot 6} = 10 \quad \text{לדוגמה:}$$

◁ זכרו כי $0! = 1$. כאן מתגלה השימושיות של הגדרה זו.

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{5!(5-5)!} = \frac{5!}{5! \cdot 0!} = \frac{120}{120 \cdot 1} = 1 \quad \text{וכן:}$$

נסכם: ראינו שהביטוי $(a+b)^n$ הוא סכום של ביטויים מהצורה $a^n, a^{n-1}b, \dots, a^1b^{n-1}, b^n$, כלומר כל הביטויים מהצורה $a^{n-i}b^i$ עבור $0 \leq i \leq n$, כאשר לפני כל מחובר מופיע מקדם מספרי. המקדמים המספריים הם המקדמים הבינומיים $\binom{n}{i}$. מכאן מתקבלת הנוסחה הבאה:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n}b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

בסימון הסיגמא נוסחה זו נראית כך:

נוסחה זו נקראת **נוסחת הבינום**.

תוכלו למצוא את הוכחות הנוסחאות שבסעיף זה (נוסחת הבינום ונוסחת המקדמים הבינומיים) בפתרון שאלה 29. אך למטרות קורס זה ניתן לפסוח על הוכחות אלה, שהן מורכבות במקצת.

נתרגל עתה את השימוש בנוסחת הבינום.

שאלה 25

פשטו את הביטויים הבאים, בעזרת נוסחת הבינום:

א. $(x+2y)^3$ ב. $(x-y)^4$ ג. $(a+b)^5 + (a-b)^5$

התשובה בעמוד 214

שאלה 26

א. כתבו את השורה ה-6 וה-7 במשולש פסקל.

ב. חשבו את המקדמים הבינומיים $\binom{6}{0}, \binom{6}{1}, \binom{6}{2}, \binom{6}{3}$ בעזרת נוסחת המקדמים הבינומיים והשוו למשולש פסקל.

התשובה בעמוד 214

שאלה 27

הוכיחו, לכל n טבעי:

א. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ב. $\binom{n}{1} = n$

ג. אם $n \geq 2$: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ד. $\binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}$

התשובה בעמוד 215

שאלה 28

הוכיחו:

א. $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$ ב. $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = 0$

רמז: נסו להציב את הערכים 1 או -1 עבור a ו- b בנוסחת הבינום.

התשובה בעמוד 215

התוכלו לאמר, מה המשמעות של כל אחת מהנוסחאות לגבי משולש פסקל?

שאלה 29 (למעוניינים להתעמק בנוסחת הבינום)

לכל n טבעי ו- $0 \leq i \leq n$, נגדיר:

- $P_{n,i} =$ האיבר ה- i בשורה ה- n במשולש פסקל.
- $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ (הגדרה זו שונה ממה שהגדרנו קודם, אך מיד נוכיח שההגדרות שקולות).

א. הוכיחו שלכל $1 \leq i \leq n$, $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$.

ב. הסיקו שלכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים: $P_{n,i} = \binom{n}{i}$.

ג. הוכיחו את נוסחת הבינום.

רמז: הוכיחו באינדוקציה על n , והיעזרו בנוסחה שבסעיף א.

התשובה בעמוד 216

אינדוקציה החל ממקום מסוים

בשיטת האינדוקציה שלמדנו, בודקים את נכונות הטענה עבור $n = 1$, ולאחר מכן מוודאים שנכונותה עבור n מסוים גוררת את נכונותה עבור $n + 1$. מכאן מסיקים את נכונותה לכל $n \geq 1$ שלם.

באופן דומה, ניתן להתחיל את האינדוקציה מכל מספר שלם שנרצה, ולא בהכרח מ- $n = 1$. זהו תוכנו של העיקרון הבא:

עיקרון האינדוקציה החל ממקום מסוים

יהי m מספר שלם, ותהי $P(n)$ טענה התלויה במספר שלם $n \geq m$.

אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. הטענה $P(m)$ נכונה.

ב. לכל מספר שלם $n \geq m$, אם $P(n)$ נכונה אז $P(n + 1)$ נכונה.

אז הטענה $P(n)$ נכונה לכל $n \geq m$.

בהוכחה לפי עיקרון זה, שלב הבסיס הוא בדיקת התקיימות הטענה לגבי $n = m$. שלב האינדוקציה הוא הוכחה שלכל $n \geq m$, אם הטענה נכונה עבור n אז היא נכונה עבור $n + 1$.

נדגים זאת בהוכחת הטענה הבאה:

טענה: לכל מספר שלם $n \geq 5$, מתקיים $2^n > n^2$.

שימו לב שטענה זו לא מתקיימת עבור הערכים $n = 2, 3, 4$:

n	2^n	n^2
1	2	1
2	4	4
3	8	9
4	16	16
5	32	25

הוכחת הטענה:

נבדוק שהטענה מתקיימת עבור $n = 5$: $2^5 = 32$, $5^2 = 25$, ולכן $2^5 > 5^2$.
כעת, נניח שהטענה מתקיימת עבור $n \geq 5$ מסוים:

$$2^n > n^2$$

$$2^{n+1} > 2n^2$$

נכפיל את האי־שוויון ב־2:

עלינו להוכיח שהטענה נכונה עבור $n + 1$, כלומר שמתקיים: $2^{n+1} > (n + 1)^2$.

לאור הידוע לנו, די אם נוכיח שמתקיים $2n^2 > (n + 1)^2$.

$$2n^2 > n^2 + 2n + 1$$

כלומר, מספיק להוכיח ש

$$\Leftrightarrow n^2 > 2n + 1$$

אי־שוויון זה שקול לאי־שוויון הבא:

$$n^2 \geq 5n = 2n + 3n > 2n + 1$$

ואי־שוויון זה מתקיים עבור $n \geq 5$, כי:

נסכם: הוכחנו כי $2n^2 > (n + 1)^2$, לכן $2^{n+1} > 2n^2 > (n + 1)^2$, ובכך סיימנו את צעד האינדוקציה, ואת ההוכחה כולה. $\square$

הערה: בהוכחה שהצגנו, בשלב מסוים הבחנו שדי להוכיח טענה מסוימת כדי לסיים את הוכחת הטענה שהיה ברצוננו להוכיח. לאחר מכן הוכחנו את הטענה המסוימת ובכך סיימנו את מלאכתנו. לצעד כזה קוראים **רדוקציה**, כלומר צמצום. צעד של רדוקציה אינו רק צעד פורמלי בהוכחת טענה, אלא צעד מחשבתי בעת חיפוש ההוכחה. לעתים אנו מבחינים שהטענה שברצוננו להוכיח יכולה לנבוע מטענה אחרת. באותו שלב, איננו יודעים אם הטענה האחרת היא נכונה, ולכן אנו מקדישים את מאמצינו לניסיון להוכיח את הטענה האחרת. אם הדבר עולה בידנו, מוכתר כל המאמץ בהצלחה. דבר זה הוא אופייני לתהליך של חיפוש הוכחה מתמטית: בדיקת כיוונים שונים וטיעונים שונים, עד שמוצאים את הטיעון המנצח.

ניתן היה לכתוב את צעד האינדוקציה ללא צעדי רדוקציה כך:

נניח שהטענה מתקיימת עבור $n \geq 5$ מסוים:

$$2^n > n^2$$

נכפיל את האי־שוויון ב־2:

$$2^{n+1} > 2n^2$$

מכאן נקבל:

$$2^{n+1} > 2n^2 = n^2 + n^2 \geq n^2 + 5n = n^2 + 2n + 3n$$

$$> n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

ובכך צעד האינדוקציה הושלם. $\square$

היתרון של צורת רישום זו הוא בהיותה קצרה ומסודרת יותר. החיסרון שלה הוא בהסתרת התהליך המחשבתי שהוביל להוכחה. שתי הדרכים הן לגיטימיות.

שאלה 30

מצאו, החל מאיזה ערך של n טבעי מתקיים האי־שוויון $n! > 2^n$. הוכיחו את טענתכם.

התשובה בעמוד 217

שיטת האינדוקציה השלמה

בכל דרכי האינדוקציה שהכרנו, צעד האינדוקציה כלל את הוכחת הטענה עבור $n+1$, בהתבסס על נכונותה עבור n .

כדי להוכיח באינדוקציה טענה $P(n)$ שבה ערך n הוא מספר טבעי כלשהו, אנו למעשה מוכיחים שורה אינסופית של טענות:

ראשית, אנו מוכיחים את $P(1)$ (בסיס האינדוקציה).

לאחר מכן, אנו מוכיחים:

אם $P(1)$ אז $P(2)$.

אם $P(2)$ אז $P(3)$.

אם $P(3)$ אז $P(4)$.

:

הוכחת $P(3)$ מתבססת על $P(2)$. אבל בשלב שבו אנו מוכיחים את $P(3)$ ידועה לנו נכונות שתי הטענות $P(1)$ ו־ $P(2)$.

וכן: הוכחת $P(4)$ מתבססת על $P(3)$. אבל בשלב שבו אנו מוכיחים את $P(4)$ ידועה לנו נכונות הטענות $P(1)$, $P(2)$ ו־ $P(3)$.

כללית, בשלב שבו מוכיחים את $P(n+1)$ ידועה לא רק הטענה $P(n)$, אלא כל הטענות הקודמות: $P(1), P(2), \dots, P(n)$.

כפי שנראה מיד, במצבים רבים אינפורמציה זו היא שימושית וכדאי לנצל. במצבים אלה קל יותר להוכיח את הטענה $P(n+1)$ על בסיס כל המקרים הקודמים $P(1), P(2), \dots, P(n)$, ולא רק על בסיס המקרה האחרון $P(n)$. שיטה זו נקראת **אינדוקציה שלמה**, ומבוססת על העיקרון הבא:

עיקרון האינדוקציה השלמה

תהי $P(n)$ טענה התלויה במספר טבעי n .

אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

א. הטענה $P(1)$ נכונה.

ב. לכל מספר טבעי n , אם נכונות הטענות $P(1), P(2), \dots, P(n)$ אז $P(n+1)$ נכונה.

אז הטענה $P(n)$ נכונה לכל n טבעי.

הערות:

1. לעיתים נוח יותר לנסח את תנאי האינדוקציה השלמה כך:

א. הטענה $P(1)$ נכונה.

ב. לכל מספר טבעי $n > 1$, אם נכונות הטענות $P(1), P(2), \dots, P(n-1)$ אז $P(n)$

נכונה.

נוסח זה הוא כמובן שקול.

2. כמו האינדוקציה הרגילה, גם את האינדוקציה השלמה ניתן להתחיל במספר שלם

כלשהו, ולא בהכרח ב-1. כדי להוכיח טענה $P(n)$ עבור $n \geq m$, די להוכיח את הטענה

$P(m)$, ולכל $n > m$ להוכיח שאם הטענות $P(m), P(m+1), \dots, P(n-1)$ נכונות אז

$P(n)$ נכונה.

נדגים את עיקרון האינדוקציה השלמה במקרים הבאים:

א. שבירה של טבלת שוקולד

נתונה טבלת שוקולד מלבנית, המורכבת מ-28 קוביות שוקולד במערך של 7 שורות. יש

לפרק את הטבלה לקוביות בודדות על ידי פעולות שבירה, לאורך שורה או עמודה. מה

המספר הקטן ביותר של פעולות הנדרש לביצוע פעולה זו?

ננסה תחילה דרך פשוטה – לשבור את הטבלה ל-7 שורות נפרדות, ולפרק כל שורה

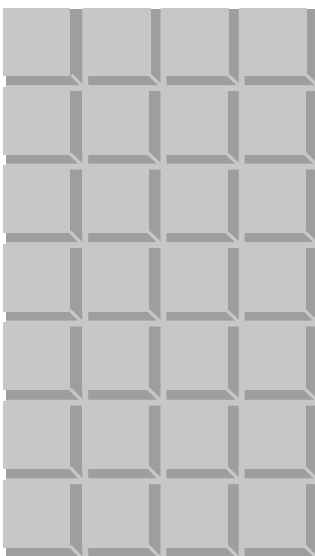
לקוביות בודדות. נדרשות 6 פעולות שבירה כדי לפרק את הטבלה לשורות נפרדות,

ועבור כל שורה נדרשות 3 פעולות על מנת לפרק אותה לחלוטין. בסך הכול, נדרשות

$$6 + 7 \cdot 3 = 27$$

פעולות בדרך זו. אך אולי בדרך אחרת ניתן לבצע פחות פעולות? נוכיח שזה אינו

אפשרי, ובכל דרך אפשרית יידרשו 27 פעולות שבירה. למעשה, נוכיח טענה חזקה יותר:



טענה

על מנת לפרק טבלת שוקולד מלבנית בעלת n קוביות, נדרשות $n - 1$ פעולות שבירה, בכל דרך שבה נבחר לפרק את הטבלה.

הוכחה

נוכיח טענה זו בשיטת האינדוקציה השלמה.
ראשית, נוודא שהטענה נכונה עבור $n = 1$: ואכן, כדי לפרק טבלת שוקולד בעלת קוביה יחידה, לא נדרשת אף פעולה – כלומר נדרשות $0 = 1 - 1$ פעולות.
כעת, עבור n טבעי כלשהו, נניח שהטענה נכונה עבור $1, 2, \dots, n$ ונוכיח שהיא נכונה עבור $n + 1$. הנחת האינדוקציה היא שלכל k טבעי המקיים $k < n + 1$, נדרשות $k - 1$ פעולות כדי לפרק טבלת שוקולד מלבנית בעלת k קוביות, בכל דרך פעולה אפשרית.
כעת נתבונן בטבלת שוקולד בעלת $n + 1$ קוביות (אין זה חשוב כמה שורות יש בה). בכל דרך שנבחר לפרק אותה, פעולת השבירה הראשונה תפרק אותה לשני חלקים מלבניים. נסמן את מספר הקוביות בחלק הראשון ב- a ואת מספר הקוביות בחלק השני ב- b . מכיוון ש- $a < n + 1$ ו- $b < n + 1$, נדרשות $(a - 1)$ פעולות כדי לפרק את החלק הראשון ו- $(b - 1)$ פעולות כדי לפרק את החלק השני (על פי הנחת האינדוקציה). לכן, בסך הכול נדרשות

$$(a - 1) + (b - 1) + 1 = a + b - 1 = (n + 1) - 1$$

◁ במניין זה נספרה גם פעולת השבירה הראשונה.

פעולות כדי לפרק טבלה בעלת $n + 1$ קוביות.

□ בכך סיימנו את צעד האינדוקציה, וההוכחה הושלמה.

לפיכך, על סמך הטענה הכללית, נדרשות 27 פעולות על מנת לפרק את טבלת השוקולד.

ב. חילוק עם שארית**טענה**

יהיו a ו- d מספרים טבעיים. אז ניתן להציג את a בצורה $a = qd + r$ כש- q ו- d הם מספרים שלמים המקיימים: $q \geq 0, 0 \leq r < d$. יתרה מכך, המספרים q ו- r נקבעים ביחידות.

משמעות הטענה היא שניתן לבצע תמיד חילוק עם שארית. נתקלנו כבר בטענה זו בשיעור הראשון, בלומדנו את הנוסחה

$$\text{שארית} + \text{מחלק} \times \text{מנה שלמה} = \text{מחולק}$$

במונחי הטענה, a הוא המחולק, d הוא המחלק, q היא המנה השלמה ו- r היא השארית. כפי שלמדנו השארית היא מספר אי-שלילי הקטן מהמחלק, כלומר $0 \leq r < d$.

$$20 = \underbrace{3}_{\text{המנה}} \times \underbrace{6}_{\text{השאריית}} + \underbrace{2}_{\text{השלמה}}$$

$$a = 20, d = 6, q = 3, r = 2 \quad \text{בדוגמה זו}$$

בשיטת האינדוקציה השלמה, נוכל להוכיח את הטענה באופן מלא ומדויק.

הוכחה

נוכיח את קיומם של q ו- r באינדוקציה שלמה על a .

$$a = 1 = 0 \cdot d + 1 \quad \text{עבור } a = 1 \text{ ו- } d > 1, \text{ נוכל להציג} \\ \text{(כלומר } q = 0, r = 1 \text{).}$$

$$a = 1 = 1 \cdot d + 0 \quad \text{עבור } a = 1 \text{ ו- } d = 1, \text{ נוכל להציג} \\ \text{(כלומר } q = 1, r = 0 \text{).}$$

בשני המקרים, ערכי q ו- r מקיימים את התנאים הנדרשים.

כעת יהי $a \geq 2$ מספר טבעי. נניח שהטענה נכונה עבור $1, 2, \dots, a-1$ ונוכיח אותה עבור a .

מהנחת האינדוקציה נובע שכל מספר טבעי $a' < a$ ניתן להצגה בצורה $a' = qd + r$, כש- q ו- d מקיימים את התנאים $0 \leq r \leq d-1, q \geq 0$.

נתבונן בנפרד במקרים הבאים:

$$a = 0 \cdot d + a, q \geq 0 \quad \text{אם } a < d, \text{ אז נוכל להציג} \\ \text{(כלומר } q = 0, r = a \text{), והתנאים המבוקשים יתקיימו.}$$

$$a = 1 \cdot d + 0 \quad \text{אם } a = d, \text{ נוכל להציג} \\ \text{(כלומר } q = 1, r = 0 \text{), והתנאים המבוקשים יתקיימו.}$$

$$\text{אם } a > d, \text{ נתבונן במספר } a' = a - d. \text{ מספר זה קטן מ-} a \text{ וגדול מ-} 0. \\ \text{לפי הנחת האינדוקציה, קיימים } q' \geq 0, 0 \leq r' \leq d-1 \text{ כך ש-} a' = q'd + r'. \\ \text{לכן:} \\ a - d = q'd + r'$$

$$\Rightarrow a = d + q'd + r'$$

$$\Rightarrow a = (q'+1)d + r'$$

המספרים $q = q'+1, r = r'$ מקיימים את הנדרש:

$$a = qd + r, q \geq 0, 0 \leq r \leq d-1$$

בכך הסתיימה האינדוקציה, והוכחנו את קיומם של q ו- r הנדרשים, לכל a .
נותר להוכיח את היחידות. נניח אפוא, שקיימות שתי הצגות שונות למספר a :

$$a = qd + r \quad (0 \leq r \leq d-1, q \geq 0)$$

$$a = q'd + r' \quad (0 \leq r' \leq d-1, q' \geq 0)$$

מכאן מתקבל השוויון $qd + r = q'd + r'$
 בהכרח $q \neq q'$, כי אם $q = q'$ אז מהשוויון לעיל נובע שגם $r = r'$, ואז שתי ההצגות
 הן זהות.

נניח, ללא הגבלת הכלליות, ש- $q > q'$. נעביר אגפים ונקבל:

$$(q - q')d = r' - r$$

מכך ש- $q > q'$ נקבל $q - q' > 0$ ולכן $q - q' \geq 1$, כי $q - q'$ הוא מספר שלם.

$$(q - q')d \geq d$$

מכאן נובע:

$$r - r' \leq r - 0 \leq d - 1$$

מההגבלות על r, r' נובע:

$$(q - q')d = r' - r$$

לכן השוויון $(q - q')d = r' - r$ הוא בלתי אפשרי.

הגענו לסתירה, לכן ההנחה שיש שתי הצגות שונות היא שגויה.

בכך, הוכחנו את יחידות ההצגה.

□

מטענה זו נקבל בפרט:

- (עבור $d = 2$) כל מספר טבעי הוא מהצורה $2m$ (עבור m טבעי) או $2m + 1$ (עבור $m \geq 0$ שלם). המספרים מהצורה $2m$ הם המספרים הזוגיים; כתוצאה מכך, המספרים מהצורה $2m + 1$ הם המספרים האי-זוגיים.

- (עבור $d = 3$) כל מספר טבעי הוא מהצורה $3m$ (עבור m טבעי) או $3m + 1$ (עבור $m \geq 0$ שלם) או $3m + 2$ (עבור $m \geq 0$ שלם).

- באופן כללי: עבור כל מספר שלם d , המספרים הטבעיים מתחלקים ל- d מחלקות לפי שארית החלוקה שלהם ב- d (שכזכור יכולה להיות כל מספר בין 0 ל- $d - 1$). מחלקות אלה נקראות **מחלקות שארית**.

ג. פירוק לגורמים ראשוניים

מספר טבעי גדול מ-1 נקרא **ראשוני** אם המחלקים הטבעיים היחידים שלו הם 1 ועצמו.
 מספר טבעי גדול מ-1 שאינו ראשוני נקרא **פריק**. מספר פריק הוא בהכרח מכפלה של שני מספרים טבעיים גדולים מ-1.
 המספר 1 אינו נחשב לראשוני ולא לפריק.
 לדוגמה, 13 הוא מספר ראשוני: הוא מתחלק רק ב-1 ובעצמו. לעומתו, 12 אינו מספר ראשוני. הוא מתחלק ב-3, ובהתאם לכך ניתן להצגה כ- $3 \cdot 4$.

ניתן להוכיח כי יש אינסוף מספרים ראשוניים (לא נעשה זאת כעת). סדרת המספרים הראשוניים (המסודרים בסדר עולה) מתחילה כך:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ...

בשיטת האינדוקציה השלמה נוכיח את הטענה הבאה:

טענה

כל מספר טבעי גדול מ-1 הוא מכפלה של מספרים ראשוניים. כלומר, לכל $n > 1$, קיים מספר טבעי r , ומספרים ראשוניים $p_1, p_2, \dots, p_r$, כך ש- $n = p_1 p_2 \dots p_r$.

הוכחה

נוכיח את הטענה באינדוקציה שלמה על n . נתחיל את האינדוקציה מ- $n = 2$. $n = 2$ הוא מספר ראשוני, וככזה שווה למכפלה שהוא הגורם היחיד בה (כלומר $r = 1$ בביטוי $n = p_1 p_2 \dots p_r$). מכפלה כזו מקיימת את הנדרש, כי הגורם היחיד בה הוא ראשוני. כעת, יהי n מספר טבעי גדול מ-2. נניח שהטענה נכונה עבור כל המספרים $2, 3, \dots, n-1$. כלומר, שכל מספר $1 < k < n$ הוא מכפלה של ראשוניים. אם n הוא ראשוני, אז כמו שראינו קודם, הוא שווה למכפלה בעלת גורם יחיד (המספר הראשוני n). אחרת, n הוא מספר פריק, וניתן לבטא $n = ab$, כש- $1 < a < n$ ו- $1 < b < n$.

לפי הנחת האינדוקציה, המספרים a ו- b הם מכפלות של ראשוניים, ולכן ניתנים לביטוי באופן הבא:

$$a = p_1 p_2 \dots p_r$$

$$b = q_1 q_2 \dots q_s$$

כש- r ו- s הם מספרים טבעיים, והמספרים $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$ הם ראשוניים. נכפיל את שני השוויונות:

$$ab = p_1 p_2 \dots p_r q_1 q_2 \dots q_s$$

לכן גם $n = ab$ הוא מכפלה של מספרים ראשוניים. $\square$

הערה: ניתן להוכיח (ולא נעשה זאת כעת) שהפירוק של מספר לגורמים ראשוניים הוא יחיד, עד כדי שינוי סדר הגורמים. כלומר, אם יש שני פירוקים לגורמים ראשוניים, $a = p_1 p_2 \dots p_r = q_1 q_2 \dots q_s$, אז $r = s$ וההצגה $a = q_1 q_2 \dots q_r$ מתקבלת מההצגה $a = p_1 p_2 \dots p_r$ על ידי שינוי סדר הגורמים במכפלה. שילוב שתי הטענות: קיום הפירוק של מספר טבעי גדול מ-1 לגורמים ראשוניים, ויחידותו של פירוק זה, נקרא 'המשפט היסודי של האריתמטיקה'.

הנה, לדוגמה, הפירוק לגורמים ראשוניים של כמה מספרים טבעיים:

$$4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$$

בשאלות הבאות נתרגל הוכחות באינדוקציה שלמה.

שאלה 31

חברת 'תה בע"מ' מספקת שקיקי תה במארזים של 3 קופסאות או 5 קופסאות. החברה אינה מוכרת קופסאות בודדות. לקוח מעוניין להזמין מספר מסוים של קופסאות תה. הוכיחו שאם מספר הקופסאות המבוקש הוא לפחות 8, אז ניתן לספק את הכמות המדויקת על ידי צירוף של מארזים.

התשובה בעמוד 218

שאלה 32

הוכיחו שכל מספרי פיבונאצ'י הם מספרים טבעיים.

◁ מספרי פיבונאצ'י = האיברים בסדרת פיבונאצ'י. סדרה זו הוגדרה בעמוד 25.

התשובה בעמוד 218

שאלה 33

נגדיר סדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ באופן הבא:

$$a_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i \quad a_1 = 1, \text{ ולכל } n \text{ טבעי:}$$

מצאו נוסחה לאיבר הכללי של הסדרה (הנכונה לכל $n \geq 2$). הוכיחו את טענתכם.

התשובה בעמוד 218

סיכום שיעור 5

בשיעור זה התוודענו אל מספר גדול יחסית של מושגים חדשים:

- סדרות ודרכים להגדרתן
- סדרות חשבוניות וגיאומטריות (נוסחת האיבר הכללי והסכום)
- סימן הסכימה המרובה, סימן המכפלה המרובה
- אינדוקציה; אינדוקציה החל ממקום מסוים; אינדוקציה שלמה
- התחלקות של מספרים שלמים
- נוסחת הבינום

האינדוקציה התגלתה ככלי רב עוצמה להוכחת טענות שמעורבים בהן מספרים שלמים. בשאלות להערכה עצמית שבעמודים הבאים יש דוגמאות רבות לשימושים של האינדוקציה, והזדמנויות לתרגול כלל הנושאים שבשיעור זה.

אם אתם חשים שהנושאים בפרק זה מתקדמים יותר מאלה שבפרקים הקודמים, יש יסוד לתחושה זו. מטבעו של קורס זה, ההתקדמות היא מהירה, ולפתע המתמטיקה פורשת בפנינו קשת של גוונים ואפשרויות. המפתח להכרה טובה של נושאים אלה הוא, כמו תמיד, תרגול וחזרה. ככל שהזמן מתיר לכם, נסו להתמודד עם כמה שיותר מהשאלות שבשיעור זה, ולחזור ולהתעמק בתכניו. במקרה שנושא מסוים מתוך המכלול אינו מובן לכם, אל תיפלו ברוחכם. מוטב לשים אותו בצד, ולהמשיך בהתקדמות בקורס. תמיד תוכלו לחזור אליו בעתיד.

שאלות להערכה עצמית

שאלה 34

- נתונה הסדרה החשבונית:
 $1000, 985, 970, 955, \dots$
- כתבו את נוסחת האיבר הכללי בסדרה.
 - כמה איברים חיוביים יש בסדרה?
 - מצאו את סכום כל האיברים החיוביים שבסדרה.

התשובה בעמוד 219

שאלה 35

חשבו את הסכומים:

א. $\sum_{i=1}^{10} \frac{5}{3^i}$

ב. $2^0 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \dots + 2^{10}$

- ג. סכום סדרה הנדסית בת 5 איברים, שאיברה הראשון הוא 1 ואיברה האחרון הוא 2.
 הניחו שכל איברי הסדרה חיוביים.

התשובה בעמוד 219

שאלה 36

- תהי $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$ סדרה חשבונית המקיימת: $d = 7, a_1 = 4$.
 א. חשבו את סכום הסדרה.

ב. חשבו את הסכום: $\sum_{i=1}^{100} (-1)^i a_i$.

הדרכה: רשמו כמה מהמחוברים הראשונים בסכום באופן מפורש.

התשובה בעמוד 220

שאלה 37

הוכיחו:

א. $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$

ב. $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

ג. $\prod_{i=0}^{n-1} (a^{2^i} + b^{2^i}) = \frac{a^{2^n} - b^{2^n}}{a - b}$ (בהנחה ש- $a \neq b$)

ד. $(a - b) \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i = a^{n+1} - b^{n+1}$

התשובה בעמוד 221

שאלה 38

הוכיחו, לכל n טבעי:

א. $3 \mid 2^{n+1} + (-1)^n$

ב. $6 \mid 5^n - 2^n - 3^n$

ג. $5 \mid n^5 - n$

התשובה בעמוד 224

שאלה 39

בשאלה זו נוכיח את הנוסחה הבאה לאיבר הכללי בסידרת פיבונאצ'י:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

א. ודאו שהנוסחה מתקיימת עבור $n = 1$ ו- $n = 2$.

ב. הוכיחו שאם מספר ממשי α מקיים $\alpha^2 = \alpha + 1$ אז לכל $n \geq 3$ מתקיים:

$$\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$$

ג. פתרו את המשוואה $x^2 = x + 1$.

ד. נגדיר סדרה $G_1, G_2, G_3, \dots$ לפי הנוסחה:

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

הוכיחו כי $G_1 = G_2 = 1$, ולכל $n \geq 3$ מתקיים $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$.

ה. הסיקו כי $F_n = G_n$ לכל n .

התשובה בעמוד 225

שאלה 40

הוכיחו את הכללים הבאים, לגבי מספרים טבעיים:

א. זוגי + זוגי = זוגי

ב. זוגי + אי-זוגי = אי-זוגי

ג. אי-זוגי + אי-זוגי = זוגי

ד. זוגי $\times$ מספר כלשהו = זוגי

ה. אי-זוגי $\times$ אי-זוגי = אי-זוגי

הדרכה: התבוננו במסקנות מקיום חילוק עם שארית (בעמוד 40).

התשובה בעמוד 226

שאלה 41

התבוננו באיברי סדרת פיבונאצ'י $F_1, F_2, F_3, \dots$ ונסו לקבוע עבור איזה ערכי n , F_n הוא

זוגי. לאחר שניסחתם את השערתכם, הוכיחו אותה.

התשובה בעמוד 227

שאלה 42

יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים ממשיים. הוכיחו באינדוקציה:

א. $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$. (זו הכללה של אי-שוויון המשולש שהכרנו בשיעור 4. היעזרו

באי-שוויון זה).

ב. אם כל המספרים a_i אי-שליליים, $\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i}$. (היעזרו בשאלה 35 בשיעור 4).

התשובה בעמוד 228

שאלה 43

יהי n מספר טבעי. הוכיחו:

א. אם $a > b \geq 0$ אז $a^n > b^n \geq 0$.

ב. אם $a \geq 0, b \geq 0$ ו- $a^n = b^n$ אז $a = b$.

ג. אם $a > b \geq 0$ אז $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

הערה: הטענות בסעיפים א ו-ג צוינו בשיעור 4 ללא הוכחה.

התשובה בעמוד 229

שיעור 6

פונקציות

בשיעור זה נכיר מושג מרכזי במתמטיקה המודרנית: **הפונקציה**. מהותו של מושג זה היא ניתוח יחסי ההשפעה והתלות בין גורמים שונים בעולם הממשי והאבסטרקטי.

מצב שבו גורם אחד קובע גורם שני, הוא מצב שבו ידיעת הגורם האחד גוררת עמה ידיעה של הגורם השני. במצב כזה נאמר שהגורם השני הוא **פונקציה** של הגורם הראשון.

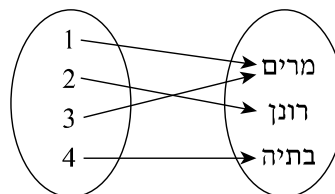
נתבונן, לדוגמה, ברשימה הבאה של תלמידים בכיתה ח:

מס' סידורי	שם פרטי	שם משפחה	צבע עיניים
1	מרים	מוסקוביץ	חום
2	רון	כהן	ירוק
3	מרים	תורג'מן	חום
4	בתיה	כהן	ירוק

במקרה זה נוכל לקבוע כי:

א. **השם הפרטי הוא פונקציה של המספר הסידורי.**

ואכן, ידיעת המספר הסידורי גוררת ידיעה של השם הפרטי. לדוגמה, אם נישאל מהו השם הפרטי של תלמיד מס' 2 בטבלה, נוכל להשיב בוודאות: רון. נוכל לייצג את הקשר בין המספר הסידורי לשם הפרטי בדיאגרמה הבאה:



בצד השמאלי מוצגת קבוצת המספרים הסידוריים של התלמידים בכיתה, ובצד הימני – קבוצת השמות הפרטיים של התלמידים בכיתה. החיצים מקשרים בין כל מספר סידורי לשם הפרטי המותאם לו. נשים לב שמכל מספר בצד השמאלי יוצא חץ אחד ויחיד. מצב זה מאפיין קשר פונקציונלי בין שני גורמים.

ב. המספר הסידורי אינו פונקציה של השם הפרטי.

אכן, ידיעת השם הפרטי לא תמיד טומנת בחובה את ידיעת המספר הסידורי. אם נישאל "מה המספר הסידורי של מרים?", לא נוכל להשיב בוודאות, שהרי יש שתי אפשרויות – 1 (מרים מוסקוביץ) או 3 (מרים תורג'מן).

שאלה 1

ביחס לנתונים שבדוגמה לעיל,

- האם שם המשפחה הוא פונקציה של השם הפרטי?
 - האם צבע העיניים הוא פונקציה של השם הפרטי?
 - האם צבע העיניים הוא פונקציה של שם המשפחה?
 - האם המספר הסידורי הוא פונקציה של צבע העיניים?
 - האם צבע העיניים הוא פונקציה של המספר הסידורי?
- במקרים שבהם התשובה היא 'כן', ציירו דיאגרמה מתאימה.

התשובה בעמוד 230

נעבור להגדרה המתמטית של מושג הפונקציה.

נניח ש- A ו- B הן קבוצות כלשהן. **פונקציה מהקבוצה A לקבוצה B** היא כלל המתאים לכל איבר של A איבר מסוים, אחד ויחיד, בקבוצה B .

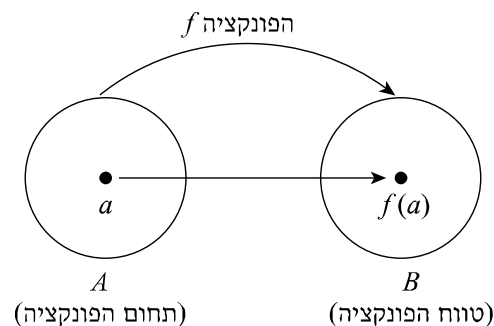
בדומה למשתנים מספריים, נסמן פונקציות על ידי אותיות. הבחירה הנפוצה ביותר לסימון פונקציה היא האות f , שהיא האות הראשונה במילה האנגלית function – פונקציה. כדי לציין את העובדה ש- f היא פונקציה מהקבוצה A לקבוצה B , נשתמש בסימון הבא:

$$f : A \rightarrow B$$

לקבוצה A נקרא **תחום הפונקציה f** , או **תחום ההגדרה של f** .

לקבוצה B נקרא **טווח הפונקציה f** .

בהינתן איבר a בקבוצה A , נסמן את האיבר המותאם לו על ידי הפונקציה f כך: $f(a)$. בלשון הדיבור נבטא זאת כך: f של a . איבר זה נקרא **ערך הפונקציה f ב- a** . מושגים אלה מסוכמים באיור הבא:

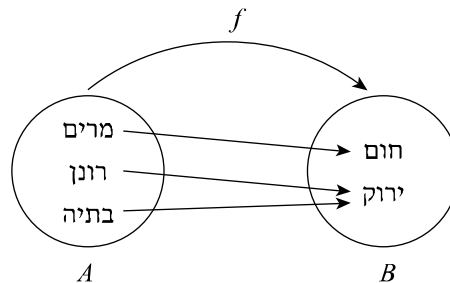


כדי לוודא שפונקציה $f : A \rightarrow B$ מוגדרת כהלכה, יש לוודא את הדברים הבאים:

- לכל איבר a בקבוצה A , מוגדר הערך $f(a)$.
- לכל איבר a בקבוצה A , $f(a)$ הוא איבר של הקבוצה B .
(בסימוני תורת הקבוצות: לכל $a \in A$ מתקיים $f(a) \in B$.)

הנה כמה דוגמאות לפונקציות:

- בדוגמה שבה פתחנו, צבע העיניים הוא פונקציה של השם הפרטי (ראו שאלה 1).
במקרה זה, אם נסמן $A = \{\text{מרם, רונן, בתיה}\}$ ו- $B = \{\text{ירוק, חום}\}$, אז צבע העיניים נתון על ידי הפונקציה $f : A \rightarrow B$, המוגדרת כך:
 $f(\text{ירוק}) = \text{בתיה}$, $f(\text{ירוק}) = \text{ירוק}$, $f(\text{רונן}) = \text{חום}$, $f(\text{מרם}) = \text{חום}$
נוכל לייצג את f על ידי דיאגרמת החיצים הבאה:



- בהי A קבוצת המילים בשפה העברית המופיעות בספר זה, ונגדיר $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ כך:
לכל $a \in A$, $f(a) = \text{מספר האותיות במילה } a$.
מספר האותיות שבכל מילה הוא מספר טבעי, ולכן הפונקציה f מוגדרת היטב.
לדוגמה, מתקיים:

$$f(\text{'תהי'}) = 3, f(\text{'לדוגמה'}) = 6, f(\text{'פונקציה'}) = 7$$

- ג. כעת נתבונן בפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת כך:

$$f(x) = x^2 + 1, \quad \text{לכל } x \in \mathbb{R}$$

נזכיר, כי $\mathbb{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים. במקרה זה, הקבוצה $\mathbb{R}$ משמשת כתחום הפונקציה, וגם כטווח הפונקציה.

לכל x ממשי, הביטוי $x^2 + 1$ מוגדר באופן אחד ויחיד, והוא מספר ממשי. מספר זה הוא ערך הפונקציה f ב- x , כלומר $f(x)$.
לדוגמה:

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 1 = 5$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 3$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 1 = 1\frac{1}{9}$$

הקבוצה $\mathbb{R}$ היא אינסופית, ולכן לא נוכל לייצג את הפונקציה f על ידי דיאגרמת חיצים. בהמשך נלמד איך בכל זאת ניתן לייצג פונקציות מהסוג של f באופן גרפי.

שאלה 2

קבעו בכל אחד מהמקרים אם הגדרת הפונקציה היא תקינה:

א. תהי A קבוצת ה בניינים ברחוב שכל המבנים בו הם בנייני דירות. תהי B קבוצת

הדירות ברחוב זה. נגדיר פונקציה $f : A \rightarrow B$ באופן הבא:

לכל $a \in A$, $f(a)$ היא דירה בבניין a .

ב. בנתוני הסעיף הקודם, הפונקציה $g : B \rightarrow A$ מוגדרת כך:

לכל $b \in B$, $g(b)$ = הבניין שבו נמצאת הדירה b .

ג. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ מוגדרת על ידי הנוסחה $f(a) = 3 - a$.

ד. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ מוגדרת על ידי הנוסחה $f(a) = a/2$.

התשובה בעמוד 231

שאלה 3

הפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ נתונה על ידי הנוסחה:

$$f(x) = x^3 - 2x$$

חשבו את $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$.

התשובה בעמוד 231

פונקציות ממשיות

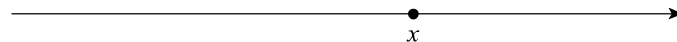
בקורס זה נתמקד בפונקציות המקשרות בין מספרים ממשיים. פונקציות מסוג זה נקראות פונקציות ממשיות, והן מתייחדות בכך שהתחום והטווח שלהן הם קבוצות של מספרים ממשיים.

הפונקציה $f(x) = x^3 - x$ שראינו בשאלה 3 לעיל היא דוגמה לפונקציה כזו. התחום והטווח שלה הם קבוצת המספרים הממשיים כולה, כלומר, $A = B = \mathbb{R}$.

הפונקציות הממשיות מאפשרות לבטא ולחקור יחסים בין משתנים ממשיים, ולכן יש להן חשיבות רבה בכל ענפי המדע. הנה כמה דוגמאות לכך:

א. נתבונן בגוף הנע על פני קו ישר (מכונית על כביש, אדם במסלול טיול, כדור הנזרק במסלול אנכי, וכן הלאה).

בכל רגע נתון, מיקומו של הגוף על הישר מוגדר במדויק, וניתן לבטאו על ידי מספר ממשי, x :



גם הזמן ניתן לביטוי כמספר ממשי (למשל מספר השניות שחלפו החל מרגע התחלתי מסוים). נסמן מספר זה ב- t .

ערכו של t קובע את ערכו של x , ולכן, x הוא פונקציה של t . ניתן לבטא $x = f(t)$, והפונקציה f מקבלת ומחזירה מספרים ממשיים, כלומר, היא פונקציה ממשית.

- ב. בכלכלה, ניתן לנתח את השינויים במחיר של מוצר מסוים או מניה מסוימת על ידי הצגת המחיר כפונקציה של הזמן, $P = f(t)$.
- ג. המשוואה המפורסמת $E = mc^2$ מבטאת את האנרגיה הגלומה באטומים של חומר בעל מסה m . במשוואה זו, המספר c הוא קבוע המייצג את מהירות האור, ולכן האנרגיה נקבעת כפונקציה של המסה: $E = f(m)$, כאשר $f(m) = mc^2$.
- ד. לפונקציות הממשיות יש חלק חשוב במתמטיקה עצמה, בהיותן כלי לתיאור של תופעות מתמטיות. במהלך הקורס נכיר סוגים שונים של פונקציות ונלמד איך לנתח את תכונותיהן.

שימוש בתבניות מספר להגדרת פונקציות

כפי שלמדנו בשיעור השני, תבנית מספר היא ביטוי המערב משתנים, מספרים ופעולות, שניתן להציב בו ערכים מספריים עבור המשתנים ולקבל תוצאה מספרית.

תבניות מספר שמופיע בהן משתנה אחד הן דרך נפוצה להגדרה של פונקציות. לדוגמה, הביטוי $x^2 + 1$ הוא תבנית מספר במשתנה x , המגדירה את הפונקציה

$$f(x) = x^2 + 1$$

כעת נתבונן בביטוי הבא: $\sqrt{2-x}$. ביטוי זה הוא תבנית מספר, שניתן להציב בה ערכי x שעבורם $2-x \geq 0$, כלומר כל x המקיים $x \leq 2$.

תבנית זו מגדירה אפוא פונקציה f שתחום הגדרתה הוא הקבוצה $\{x \mid x \leq 2\} = (-\infty, 2]$, וערכיה הם מספרים ממשיים. קיבלנו את הפונקציה $f : (-\infty, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי הנוסחה $f(x) = \sqrt{2-x}$.

ניתן להצטמצם ולהגדיר פונקציה $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ לפי אותו הביטוי: $g(x) = \sqrt{2-x}$. הפונקציה g שונה מהפונקציה f בכך שיש לה תחום הגדרה אחר.

ניתן גם לשנות את טווח הפונקציה: נגדיר למשל פונקציה $h : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ לפי אותו הביטוי, $h(x) = \sqrt{2-x}$. דבר זה אפשרי כי ערכי הביטוי $\sqrt{2-x}$ הם תמיד אי-שליליים.

דוגמאות אלה מראות שיש דרכים רבות לבחור את התחום והטווח של פונקציה המוגדרת על ידי תבנית מספר. אך בכל מקרה שבו לא צוין אחרת, נניח כי תחום ההגדרה הוא התחום הרחב ביותר שמאפשר הביטוי, כלומר קבוצת כל ההצבות החוקיות של המשתנה בביטוי, וטווח הפונקציה הוא קבוצת המספרים הממשיים כולה.

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \quad \text{לדוגמה, בהינתן הפונקציה}$$

תחום הפונקציה הוא קבוצת כל ה- x ים שעבורם $x \neq 1$, כלומר הקבוצה $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. כאמור, טווח הפונקציה הוא $\mathbb{R}$.

$$f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{לכן:}$$

שאלה 4

מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x + 1$

ב. $f(x) = \frac{1}{x(2x-1)}$

ג. $f(x) = \sqrt{|x| - |x+1|}$

התשובה בעמוד 231

שאלה 5

בדקו לגבי כל פונקציה אם היא מוגדרת היטב:

א. $f(x) = (x-6)/2$, $f : [6,8] \rightarrow [0,1]$

ב. $f(x) = 8x + 1$, $f : (0,1) \rightarrow (1,8)$

ג. $f(x) = 1 - x^2$, $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1]$

ד. $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$

התשובה בעמוד 232

מערכת הצירים הקרטזית

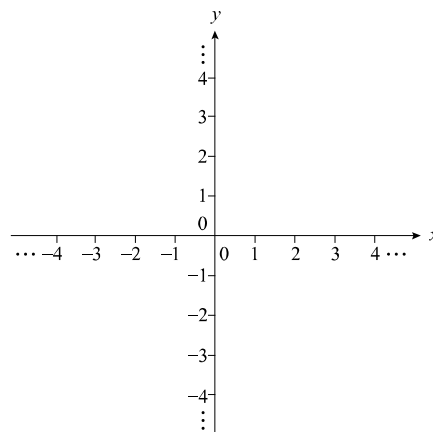
בעמודים הבאים נלמד איך ניתן לייצג פונקציות ממשיות באופן גרפי.

כדי שהדבר יתאפשר, נלמד על **מערכת הצירים הקרטזית**, פרי המצאתו של המתמטיקאי הצרפתי רנה דקארט (René Descartes, 1596-1650).

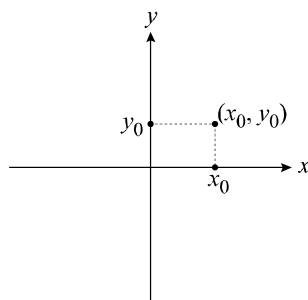
עד להמצאתו של דקארט היו האלגברה והגיאומטריה תחומים נפרדים. האחד עסק במספרים, משתנים ופעולות ביניהם, והשני – בצורות במישור, כגון ישר ומעגל.

המצאתו הגאונית של דקארט אפשרה לקשר בין שני התחומים, ובכך להרוויח פעמיים: לאפשר את פתירתן של בעיות גיאומטריות באמצעים אלגבריים, ולאפשר את הצגתם של ביטויים אלגבריים ומשוואות אלגבריות כצורות במישור.

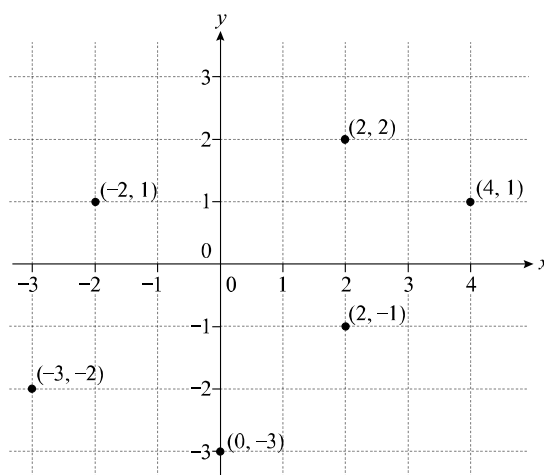
מערכת הצירים הקרטזית בנויה משני צירים ניצבים במישור, הקרויים ציר ה־ x וציר ה־ y . על כל אחד מהצירים נסמן את המספרים השלמים, כפי שעשינו בעבר לגבי ציר המספרים הממשיים.



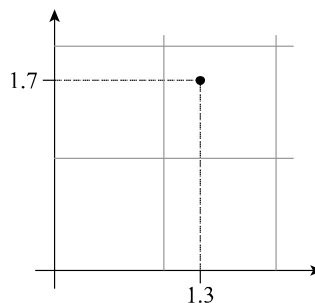
כעת נעביר ישרים מקבילים לצירים דרך הנקודות שסומנו, ונקבל מעין דף משובץ אינסופי. כל זוג מספרים שלמים, x_0 ו- y_0 , קובע נקודה יחידה על פני המישור: נקודת המפגש של הישר היוצא מהנקודה x_0 על פני ציר ה- x (ומקביל לציר ה- y), והישר היוצא מהנקודה y_0 שעל פני ציר ה- y (ומקביל לציר ה- x). נסמן את הנקודה המתקבלת, וגם את זוג המספרים עצמו, כך: (x_0, y_0) .



באיור הבא מסומנות כמה נקודות במישור בשיטה זו.



אין סיבה מיוחדת להגביל את ערכי x_0 ו- y_0 להיות מספרים שלמים. הנה, למשל, הנקודה $(1.3, 1.7)$:



ראינו כיצד זוג מספרים ממשיים (x_0, y_0) קובע נקודה במישור הקרטזי. באופן הפוך, נוכל להתאים לכל נקודה במישור זוג מספרים. בהינתן נקודה p במישור, נעביר דרכה ישרים מקבילים לציר ה- x ולציר ה- y . נקודת המפגש של הישר המקביל לציר ה- y עם ציר ה- x היא נקודה על ציר ה- x , המגדירה מספר ממשי יחיד. מספר זה נקרא **קואורדינטת x** (או **שיעור x**) של הנקודה p . באופן דומה, נקודת המפגש של הישר המקביל לציר ה- x עם ציר ה- y היא נקודה על ציר ה- y , המגדירה מספר ממשי יחיד הנקרא קואורדינטת y (או שיעור y) של הנקודה p .

יש אפוא התאמה דו-כיוונית בין זוגות (x_0, y_0) של מספרים ממשיים לבין נקודות המישור. להתאמה כזו קוראים במתמטיקה 'התאמה של אחד לאחד'.

שאלה 6

סמנו את הנקודות הבאות במערכת הצירים הקרטזית:

$(0,0)$, $(0.5,0)$, $(-1,0)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(-2,-2)$, $(1,-2)$

התשובה בעמוד 232

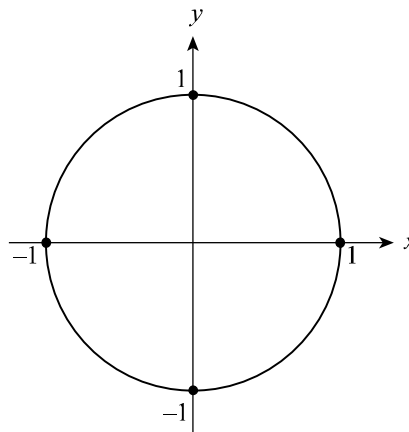
ייצוג גרפי של משוואות בשני משתנים

נניח שנתונה לנו משוואה מסוימת במשתנים x ו- y . משוואה כזו מבטאת קשר מסוים בין שני המשתנים. באמצעות מערכת הצירים הקרטזית, נוכל להציג קשר זה באופן גרפי. נתבונן באוסף הזוגות (x_0, y_0) , שעבורם המשוואה מתקיימת. כל זוג כזה מיוצג במישור הקרטזי על ידי נקודה (המסומנת גם כ- (x_0, y_0)). אם נחבר את כל הנקודות המתקבלות בדרך זו, נקבל צורה במישור המתארת את המשוואה.

$$x^2 + y^2 = 1$$

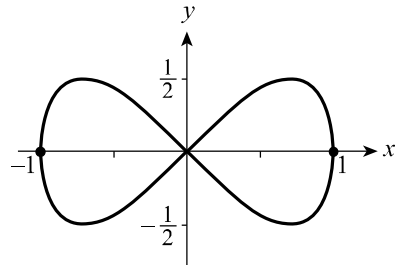
לדוגמה, אם נתונה המשוואה

אוסף הנקודות שמתקבל הוא מעגל בעל רדיוס 1 סביב הנקודה $(0,0)$ (הנקראת גם ראשית הצירים):



כל נקודה על המעגל מתאימה לזוג מספרים (x_0, y_0) המקיים: $x_0^2 + y_0^2 = 1$.
ולהפך: כל זוג מספרים (x_0, y_0) המקיים $x_0^2 + y_0^2 = 1$ מגדיר נקודה על המעגל.

דוגמה נוספת: באיור הבא מוצגים פתרונות המשוואה $x^4 - x^2 + y^2 = 0$



צורה זו נקראת **למניסקטה** (Lemniscate).

כפי שניתן לראות, בשיטת הייצוג של דקארט, נקודות במישור מתאימות לזוגות מספרים ממשיים, וצורות במישור מתאימות למשוואות בשני משתנים. בשיעור 10 (גיאומטריה אנליטית) נלמד יותר על קשר זה.

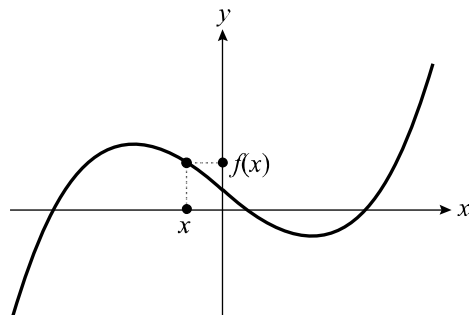
גרף של פונקציה

נניח שנתונה לנו פונקציה $f(x)$. נתבונן במשוואה:

$$y = f(x)$$

הצורה הגיאומטרית המתאימה למשוואה זו נקראת **הגרף של הפונקציה f** .

צורה זו בנויה מהנקודות (x_0, y_0) שעבורן מתקיים $y_0 = f(x_0)$. כלומר, גרף הפונקציה הוא אוסף הנקודות מהצורה $(x, f(x))$, עבור כל x בתחום ההגדרה של f .



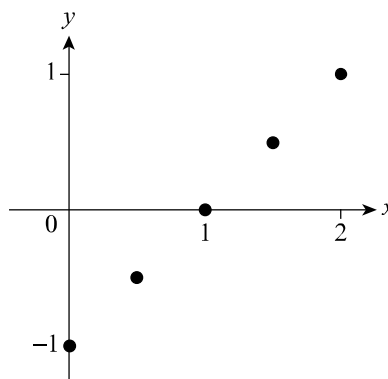
הגרף של פונקציה נותן המחשה ויזואלית למהותה של הפונקציה f ולקשר שהיא מגדירה בין המשתנים x ו- y .

נתבונן, לדוגמה, בפונקציה $f(x) = x - 1$.
 אם נציב בפונקציה $x = 0$, נקבל את הערך $y = f(x) = -1$. לפיכך הנקודה $(0, -1)$ היא חלק מגרף הפונקציה.

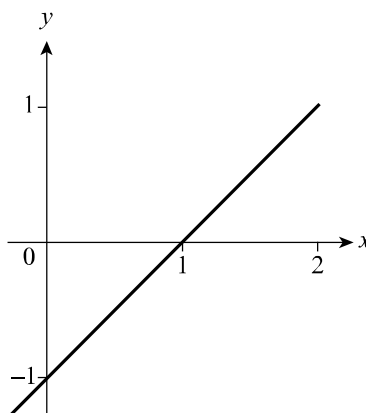
נמשיך להציב ערכים של x ולקבל נקודות על הגרף:

ערך x	ערך y מתאים	נקודה על הגרף
0.5	$f(0.5) = -0.5$	$(0.5, -0.5)$
1	$f(1) = 0$	$(1, 0)$
1.5	$f(1.5) = 0.5$	$(1.5, 0.5)$
2	$f(2) = 1$	$(2, 1)$

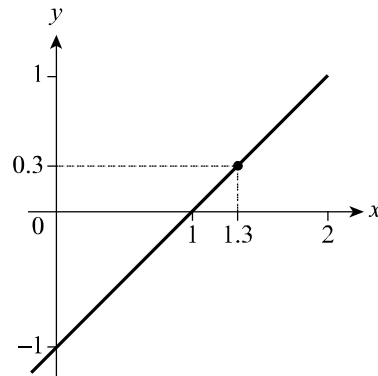
נציג את הנקודות שקיבלנו במישור הקרטזי –



כל הנקודות שהתווינו במישור נמצאות על קו ישר אחד. ככל שנוסיף לחשב את ערכי הפונקציה עבור ערכי x חדשים, ייתוספו נקודות על הישר. גרף הפונקציה הוא הקו הישר כולו:



מגרף הפונקציה נוכל לשחזר את ערכי הפונקציה, בכל נקודה x נתונה. למשל, עבור $x = 1.3$, נציין את הנקודה המתאימה למספר זה על פני ציר ה- x . נעביר דרכה ישר מקביל לציר ה- y , ונמצא את נקודת המפגש של ישר זה עם גרף הפונקציה. נעביר דרך נקודה זו ישר המקביל לציר ה- x , ונמצא את נקודת החיתוך שלו עם ציר ה- y . נקודה זו מתאימה למספר ממשי, השווה לערך הפונקציה f בנקודה $x = 1.3$, כלומר, המספר 0.3.



שאלה 7

נתונה הפונקציה:

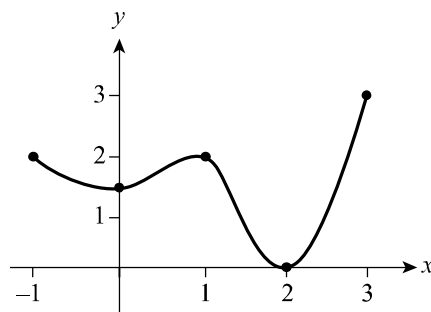
$$f(x) = \frac{x+1}{2}$$

התוו במישור הקרטזי את הנקודות $(x, f(x))$ עבור הערכים $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. התוכלו לנחש מהו גרף הפונקציה?

התשובה בעמוד 233

שאלה 8

נתונה פונקציה f בעלת הגרף הבא:

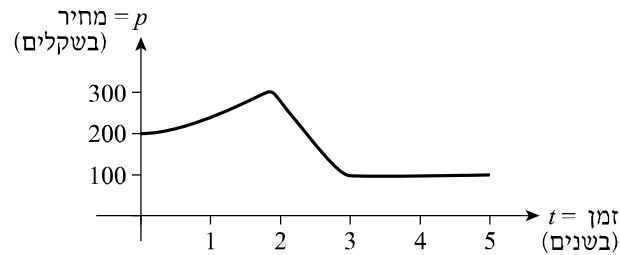


מצאו את הערכים $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$.

התשובה בעמוד 233

שאלה 9

הגרף הבא מציג את מחירו של מוצר מסוים כתלות בזמן, בתקופה של 5 שנים:



- מה היה מחירו ההתחלתי של המוצר?
- מה קרה למחיר המוצר בשנתיים הראשונות?
- מה קרה למחיר המוצר בשנה השלישית?
- מה קרה למחיר המוצר בשנים הרביעית והחמישית?
- מתי היה מחיר המוצר הגבוה ביותר לתקופה זו?

התשובה בעמוד 234

משהכרנו את מושגי הפונקציה והגרף, נעבור ללמוד על סוגים שונים של פונקציות, ועל הגרפים שלהן.

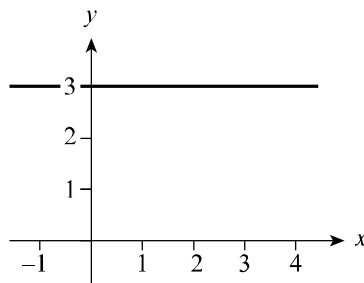
פונקציות קבועות

יהי C מספר ממשי כלשהו. הפונקציה $f(x) = C$ נקראת **פונקציה קבועה**. ערך הפונקציה אינו תלוי כלל ב־ x : הוא אותו המספר עבור כל ערכי x .

התוכלו לקבוע כיצד נראה הגרף של פונקציה קבועה?

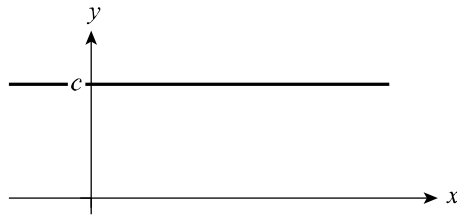
נתבונן, לדוגמה, בפונקציה $f(x) = 3$.

לכל x_0 ממשי, מתקיים $f(x_0) = 3$, ולכן $(x_0, 3)$ היא נקודה על גרף הפונקציה. אוסף הנקודות מסוג זה נראה כך:



הגרף הוא קו ישר, מקביל לציר ה־ x , הנפגש עם ציר ה־ y בנקודה $(0, 3)$.

באופן כללי: גרף הפונקציה הקבועה $f(x) = C$ הוא קו ישר, מקביל לציר ה- x , הנפגש עם ציר ה- y בנקודה $(0, C)$.



פונקציות לינאריות

פונקציה לינארית היא פונקציה מהצורה
עבור a ו- b שהם מספרים ממשיים קבועים.

$$f(x) = ax + b$$

הפונקציות הבאות הן דוגמאות לפונקציות לינאריות:

- $f(x) = x$ ($a = 1, b = 0$)
- $f(x) = 2x + 1$ ($a = 2, b = 1$)
- $f(x) = 3 - 2x$ ($a = -2, b = 3$)
- $f(x) = C$ ($a = 0, b = C$) – כלומר, כל פונקציה קבועה היא לינארית.

כיצד נראה הגרף של פונקציה לינארית?

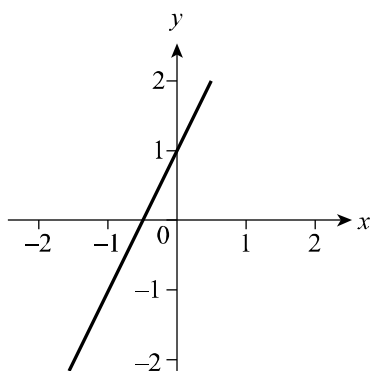
ראינו בדוגמאות לעיל שהגרפים של הפונקציות $f(x) = x - 1$ ו- $f(x) = (x + 1)/2$ הם קווים ישרים. כמו כן, ראינו שהגרף של כל פונקציה קבועה הוא קו ישר.

תופעה זו נכונה באופן כללי (ולא נוכיח זאת):

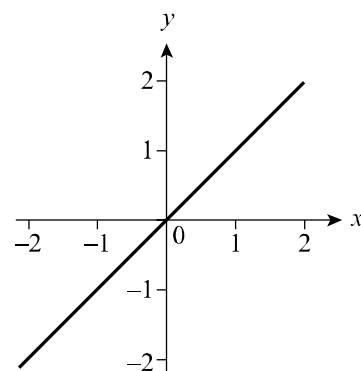
הגרף של כל פונקציה לינארית הוא קו ישר.

תופעה זו מסבירה את מקור השם 'פונקציה לינארית' (ובדומה, 'משוואה לינארית') – שם זה נגזר מהמילה הלטינית *linea* שמשמעותה קו ישר, ושממנה נגזרה המילה האנגלית *line*.

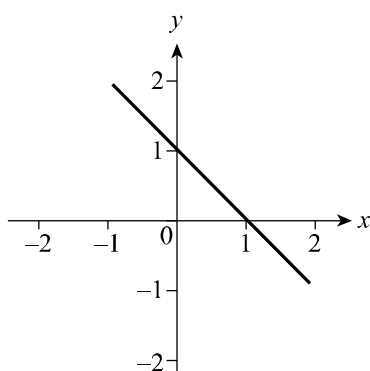
באיורים הבאים מוצגות כמה דוגמאות לפונקציות לינאריות והגרפים שלהן:



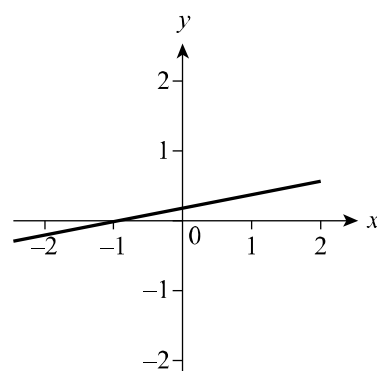
$$f(x) = 2x + 1$$



$$f(x) = x$$



$$f(x) = 1 - x$$

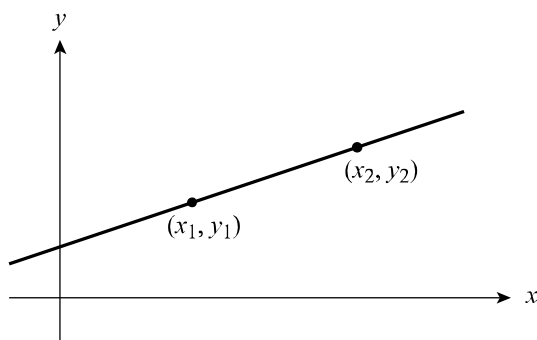


$$f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$$

כדי לשרטט את הגרף של פונקציה לינארית, די לחשב את ערכיה בשתי נקודות, x_1 ו- x_2 :

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2)$$

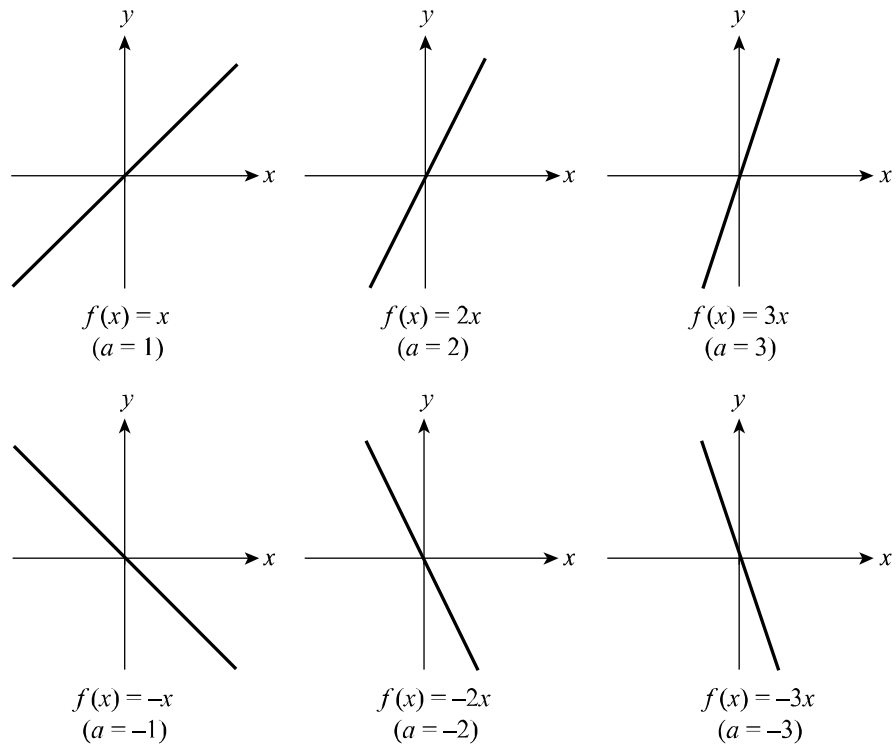
באופן זה נקבל שתי נקודות על גרף הפונקציה, (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) . לא נותר אלא להעביר קו ישר דרך שתי נקודות אלה; ישר זה הוא גרף הפונקציה.



שאלה 10

שרטטו את גרף הפונקציה $f(x) = 2 - 1.5x$, בתחום $-2 \leq x \leq 2$.

נבחן את השפעתם של הקבועים a ו- b על גרף הפונקציה הלינארית $f(x) = ax + b$.
נתבונן בגרפים הבאים:



ניתן לראות שאם a חיובי אז הפונקציה נמצאת במגמת עלייה: ככל ש- x גדל, גם y גדל; ואם a שלילי אז הפונקציה נמצאת במגמת ירידה: ככל ש- x גדל, y קטן. אם $a = 0$ אז הפונקציה קבועה ולכן אינה במגמת עלייה או ירידה.

יתרה מכך: עבור a חיובי, ככל ש- a גדול יותר כך ערכי y מטפסים בצורה מהירה יותר. עבור a שלילי, ככל ש- a קטן יותר כך ערכי הפונקציה צוללים מטה בקצב מהיר יותר.

מסיבה זו, הקבוע a נקרא **שיפוע** הפונקציה הלינארית $f(x) = ax + b$.

כדי להבין טוב יותר את משמעות השיפוע, נניח ש- x_1 ו- x_2 הם שני מספרים ממשיים כך ש- $x_1 \neq x_2$, ונתבונן בערכי הפונקציה f בנקודות אלה:

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

$$f(x_2) = ax_2 + b$$

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

נחסר את השוויון הראשון מהשני:

מכך ש־ $x_1 \neq x_2$ נובע ש־ $x_2 - x_1 \neq 0$. נחלק את השוויון שהתקבל במספר זה:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

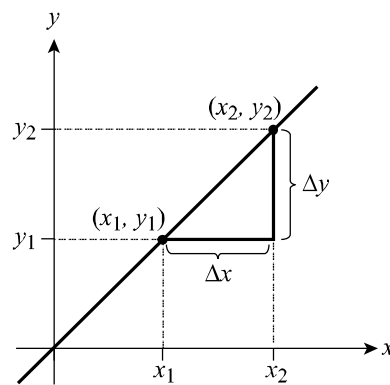
נסמן: $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. הנקודות על גרף הפונקציה הן (x_1, y_1) ו־ (x_2, y_2) .

כמו כן, נסמן: $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$

האות היוונית Δ (דלתא) היא סימון מקובל לציון של הפרש.

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

בסימונים אלה:



מנוסחאות אלה עולה כי אם $x_2 = x_1 + \Delta x$ אז $y_2 = y_1 + a\Delta x$. במילים אחרות:

בפונקציה לינארית, אם נגדיל את ערכו של x ב־ Δx יחידות, יגדל ערכו של y ב־ $\Delta y = a \cdot \Delta x$ יחידות.

בעזרת קשר זה נקבל נוסחה לפונקציה לינארית f בהינתן השיפוע שלה, a , וערכה בנקודה יחידה x_0 . פונקציה כזו מקיימת, לכל x ממשי,

$$f(x) - f(x_0) = a \cdot (x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$$

ולכן

שאלה 11

א. מצאו פונקציה לינארית f בעלת שיפוע 3, המקיימת $f(10) = 2$.

ב. מצאו פונקציה לינארית f בעלת שיפוע -2, המקיימת $f(-1) = 3$.

התשובה בעמוד 235

שאלה 12

מצאו פונקציה לינארית f המקיימת: $f(1) = 5$, $f(3) = 11$.

הדרכה: מצאו תחילה את שיפוע הפונקציה.

התשובה בעמוד 235

פונקציות לינאריות, או קשרים לינאריים בין משתנים, מופיעים בהקשרים רבים, ומשמעות הקבוע a נקבעת בהתאם להקשר.

נתבונן, לדוגמה, במצב שבו גוף נע על קו ישר במהירות קבועה. במצב זה מיקום הגוף הוא פונקציה של הזמן, $x = f(t)$.

אם מהירות התנועה היא v יחידות מרחק ביחידת זמן אחת, ומיקומו של הגוף בזמן t_0 הוא x_0 , הרי שבזמן $t > t_0$ חלפו $t - t_0$ יחידות זמן, והגוף התקדם $v \cdot (t - t_0)$ יחידות מרחק.

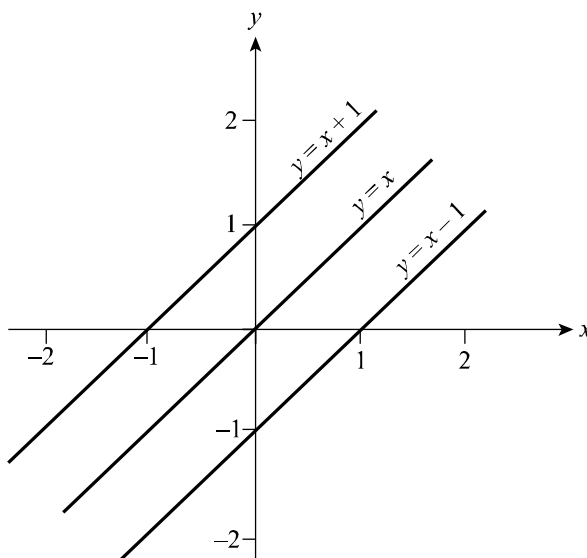
$$f(t) = x_0 + v \cdot (t - t_0) = x_0 - vt_0 + vt$$

לכן ומכאן שהפונקציה f היא פונקציה לינארית, ושיפוע הפונקציה שווה למהירות, v .

באופן דומה, אם נתבונן בבריכה המתמלאת מים בקצב קבוע, כמות המים בבריכה תהיה פונקציה לינארית של הזמן. במקרה זה שיפוע הפונקציה הלינארית יהיה קצב מילוי המים בבריכה.

אנו רואים כי לקבוע a בפונקציה הלינארית $f(x) = ax + b$ יכולות להיות משמעויות שונות: שיפוע (שהוא מושג גיאומטרי), מהירות (מושג פיזיקלי), וכן הלאה. באופן משותף לכל המשמעויות הללו, נוכל לאמר שהקבוע a מייצג את **קצב השינוי** של הפונקציה הלינארית f .

כעת נבחן את השפעת הקבוע b על גרף הפונקציה $f(x) = ax + b$.



הגדלת ערכו של b מסיטה את הישר הנתון כלפי מעלה, והקטנתו מסיטה את הישר כלפי מטה. כל הישרים המתקבלים משינוי בערכו של b (ללא שינוי ערכו של a) מקבילים זה לזה.

אם נציב $x = 0$ בפונקציה $f(x) = ax + b$, נקבל את הערך

$$f(0) = a \cdot 0 + b = b$$

הנקודה $(0, b)$ נמצאת, אפוא, על גרף הפונקציה f . נקודה זו נמצאת גם על ציר ה- y .

לפיכך, b הוא שיעור- y של נקודת המפגש של הישר $y = ax + b$ עם ציר ה- y .

שאלה 13

מצאו את נקודות המפגש של גרף הפונקציה $f(x) = 2x + 3$ עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .

התשובה בעמוד 235

פונקציות ריבועיות

פונקציה ריבועית היא פונקציה מהצורה

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

עבור a, b, c מספרים ממשיים קבועים, ובהנחה ש- $a \neq 0$.

אם $a = 0$, הביטוי $ax^2 + bx + c$ מייצג פונקציה לינארית, שאינה פונקציה ריבועית.

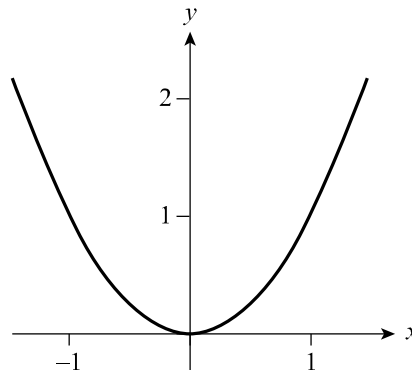
הפונקציות הבאות הן דוגמאות לפונקציות ריבועיות:

- $f(x) = x^2$ ($a = 1, b = 0, c = 0$)
- $f(x) = 5x^2 - 3x - 2$ ($a = 5, b = -3, c = -2$)
- $f(x) = x - x^2$ ($a = -1, b = 1, c = 0$)

בכדי לבחון את צורת הגרף של פונקציות ריבועיות, נתבונן תחילה בגרף של פונקציה ריבועית אחת ספציפית:

$$f(x) = x^2$$

הגרף של פונקציה זו נראה כך:



צורה זו נקראת **פרבולה**.

נשים לב שהגרף סימטרי ביחס לציר ה- y . סימטריה זו נובעת מכך שהפונקציה מקיימת

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

נקודת המפגש של הפרבולה עם ציר הסימטריה נקראת **קודקוד הפרבולה**. במקרה של הפונקציה שלפנינו, נקודה זו היא $(0,0)$, כלומר ראשית הצירים. נקודה זו היא גם הנקודה על הגרף שבה שיעור y הוא הקטן ביותר, ובהתאם לכך הפונקציה $f(x)$ מקבלת בנקודה $x = 0$ את ערכה הנמוך ביותר. נקודה כזו נקראת **נקודת מינימום** של הפונקציה.

כעת נתבונן בפונקציה ריבועית כללית:

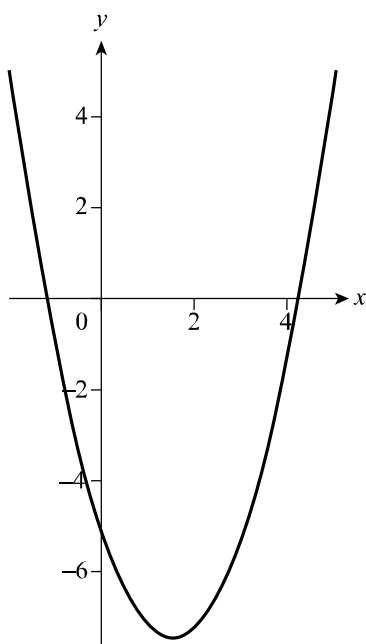
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

כפי שנראה בהמשך השיעור, הגרפים של כל הפונקציות הריבועיות דומים זה לזה: ניתן לקבל כל גרף מכל גרף אחר על ידי ביצוע פעולות של הזזה, מתיחה ו/או שיקוף במקביל לצירים. בפרט, כל הגרפים דומים בצורתם לגרף הפונקציה $f(x) = x^2$. לכן:

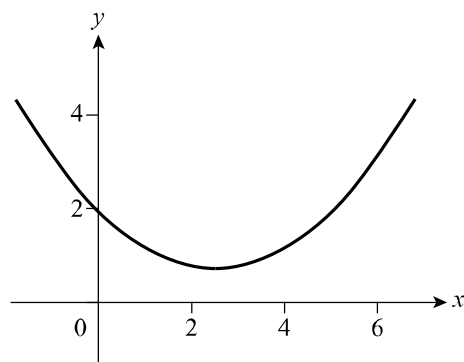
הגרף של פונקציה ריבועית הוא פרבולה.

לפי סימן הקבוע a נקבע הכיוון שאליו פונה הפרבולה:

- אם $a > 0$ אז הפרבולה פונה כלפי מעלה (כמו גרף הפונקציה $f(x) = x^2$). במקרה זה הפרבולה נקראת **חיובית** או **"מחייכת"**. לדוגמה נתבונן בגרפים הבאים:



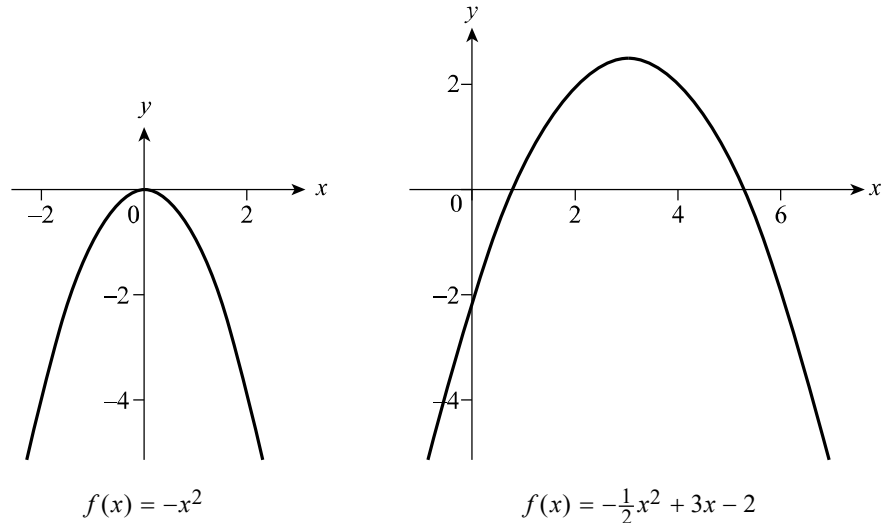
$$f(x) = x^2 - 3x - 5$$



$$f(x) = \frac{1}{5}x^2 - x + 2$$

כפי שניתן לראות מאיורים אלה, גודלו של a משפיע על מראה הפרבולה: ככל ש- a גדול יותר, כך הפרבולה צרה יותר.

- אם $a < 0$ אז הפרבולה פונה כלפי מטה. במקרה זה הפרבולה נקראת **שלילית** או **"עצובה"**.
לדוגמה:

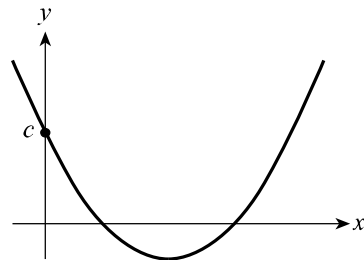


כדי להבין טוב יותר את הקשר בין הקבועים a, b, c למיקום הפרבולה במישור, נמצא היכן פוגשת הפרבולה את הצירים.

כדי לאתר את נקודת מפגש הפרבולה עם ציר ה- y , די להציב $x = 0$ בקשר $y = f(x)$:

$$f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$$

לכן הפרבולה פוגשת את ציר ה- y בנקודה $(0, c)$.



נעבור לאיתור נקודות מפגש הפרבולה עם ציר ה- x . כדי לאתרן יש למצוא את ערכי x שעבורם $y = f(x) = 0$. במילים אחרות, עלינו לפתור את המשוואה

$$ax^2 + bx + c = 0$$

למרבה השמחה, משוואה זו מוכרת לנו היטב: זו המשוואה הריבועית בצורתה הכללית.

בשיעור 3 הגדרנו $D = b^2 - 4ac$ (הדיסקרימיננטה של המשוואה). נקרא לביטוי זה מעתה גם **הדיסקרימיננטה של הפונקציה הריבועית** $f(x) = ax^2 + bx + c$. ראינו שפתרונות המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$ הם:

- אם $D > 0$ אז יש שני פתרונות הנתונים על ידי נוסחת השורשים

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

במקרה זה הפרבולה נפגשת עם ציר ה- x בנקודות $(x_1, 0)$ ו- $(x_2, 0)$.

- אם $D = 0$ אז יש פתרון אחד ויחיד: $x_1 = x_2$ בנוסחת השורשים.

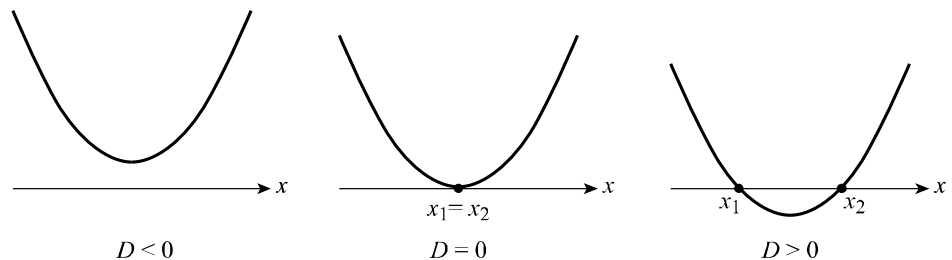
במקרה זה הפרבולה נפגשת עם ציר ה- x בנקודה $(x_1, 0)$.

- אם $D < 0$ אז אין פתרונות כלל.

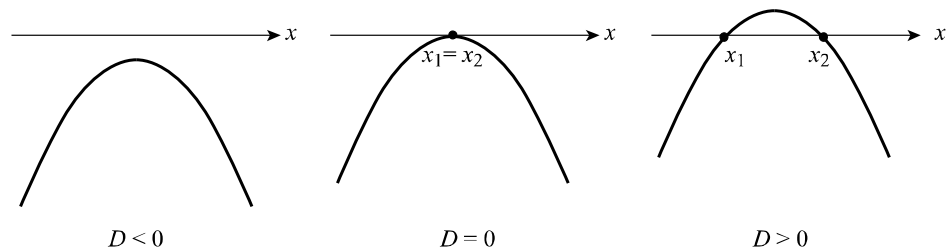
במקרה זה הפרבולה אינה נפגשת עם ציר ה- x .

בהתאם לכך נקבע מיקומה של הפרבולה ביחס לציר ה- x :

במקרה ש- $a > 0$:



במקרה ש- $a < 0$:



להשלמת התמונה נמצא את שיעורי קודקוד הפרבולה. בפרבולה חיובית הקודקוד הוא הנקודה בעלת שיעור- y הקטן ביותר, ובפרבולה שלילית הקודקוד הוא הנקודה בעלת שיעור- y הגדול ביותר.

כדי למצוא את מיקום הקודקוד, נציג את הפונקציה הריבועית בשיטת ההשלמה לריבוע:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a} \end{aligned}$$

• עבור a חיובי, מתקיים תמיד $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0$ והביטוי $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ מתאפס כאשר $x = -b/(2a)$. לכן הפונקציה הריבועית מקבלת את ערכה הנמוך ביותר בנקודה $x = -b/(2a)$, וערך זה הוא $-D/(4a)$. קודקוד הפרבולה הוא אפוא הנקודה $(-b/(2a), -D/(4a))$.

• עבור a שלילי, מתקיים תמיד $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \leq 0$ והביטוי $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ מתאפס כאשר $x = -b/(2a)$. לכן הפונקציה מקבלת את ערכה הגבוה ביותר בנקודה זו. גם במקרה זה, קודקוד הפרבולה הוא הנקודה $(-b/(2a), -D/(4a))$.

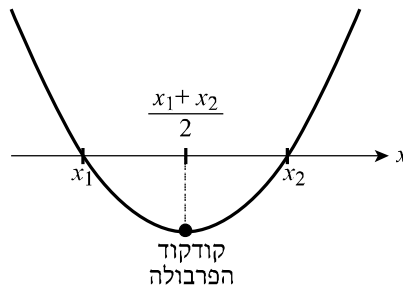
ניתן להוכיח שהפרבולה סימטרית ביחס לישיר המקביל לציר ה- y העובר דרך קודקודה (לא נעשה זאת כעת).

לבסוף, נשים לב לכך שבמקרה ש- $D \geq 0$, מתקיים הקשר הבא:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

◁ לפי נוסחאות וייטה (ראו שיעור 3).

כלומר: שיעור- x של קודקוד הפרבולה שווה לממוצע של שורשי המשוואה $ax^2 + bx + c$. ניתן לראות זאת באיור הבא:



לסיכום:

- גרף הפונקציה $f(x) = ax^2 + bx + c$ הוא פרבולה.
- הפרבולה פונה כלפי מעלה ("מחייכת") כאשר $a > 0$, וכלפי מטה ("עצובה") כאשר $a < 0$.
- נקודת המפגש של הפרבולה עם ציר ה- y היא $(0, c)$.
- נקודות המפגש של הפרבולה עם ציר ה- x הן $(x_1, 0)$ ו- $(x_2, 0)$ כש- x_1, x_2 הם פתרונות המשוואה הריבועית $f(x) = 0$.
- קודקוד הפרבולה הוא הנקודה $(-b/(2a), -D/(4a))$, כש- $D = b^2 - 4ac$. D נקרא **הדיסקרימיננטה של f** .

שאלה 14

לגבי כל אחת מהפונקציות הריבועיות הנתונות, מצאו את נקודות המפגש עם הצירים ואת הקודקוד של הפרבולה המתאימה. התוו את גרף הפונקציה.

התשובה בעמוד 235

א. $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ב. $f(x) = x^2 + 3x + 5$ ג. $f(x) = 6x - x^2 - 9$

פונקציות המוגדרות כ"הדבקה"

ראינו כיצד ניתן להגדיר פונקציה $f(x)$ באמצעות ביטוי שהוא תבנית מספר במשתנה x . דרך נוספת להגדרת פונקציה היא פיצול התחום לכמה חלקים, והגדרת הפונקציה באמצעות ביטוי שונה בכל חלק. נתבונן, לדוגמה, בהגדרה הבאה:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 < x \leq 3 \end{cases}$$

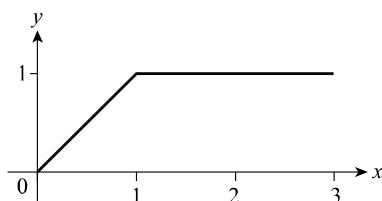
משמעות ההגדרה היא שעבור x המקיים $0 \leq x \leq 1$, מתקיים $f(x) = x$, ועבור x המקיים $1 < x \leq 3$, מתקיים $f(x) = 1$.

תחום ההגדרה הוא אפוא $[0, 1] \cup (1, 3] = [0, 3]$

כדי לחשב את הערך $f(x_0)$ עבור מספר $x_0 \in [0, 3]$ מסוים, יש לבדוק תחילה לאיזה חלק של התחום המספר שייך, ובהתאם לכך להפעיל את הכלל המתאים.

$0 \leq 0 \leq 1$	כי	$f(0) = 0$	לדוגמה:
$0 \leq 0.7 \leq 1$	כי	$f(0.7) = 0.7$	
$1 < 2 \leq 3$	כי	$f(2) = 1$	

כדי לשרטט את גרף הפונקציה f , נשרטט בכל תת-תחום את גרף הפונקציה המתאימה. כלומר: בתת-תחום $[0, 1]$ נשרטט את גרף הפונקציה $f_1(x) = x$, ובתת-תחום $(1, 3]$ נשרטט את גרף הפונקציה $f_2(x) = 1$. כך מתקבל הגרף הבא:

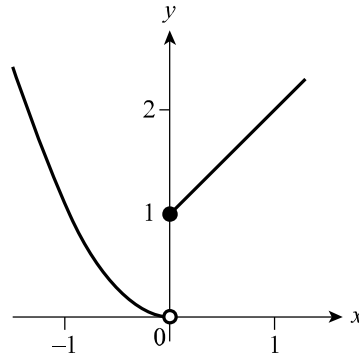


גרף זה הוא "הדבקה" של שני גרפים קטנים יותר, ומסיבה זו נקרא לפונקציה f "הדבקה" של הפונקציות f_1 ו- f_2 המוגדרות בתחומיהן.

בהגדרות מסוג זה חשוב לוודא שלתת-תחומים השונים אין נקודות משותפות. כך נימנע מדור־משמעות, שהיא אסורה בהגדרת פונקציה.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases} \quad \text{נתבונן בדוגמה נוספת:}$$

גרף הפונקציה נראה כך:



שימו לב שבנקודה $x=0$, הביטויים x^2 , $x+1$ לא מתלכדים ($0^2 = 0$, $0+1 = 1$). לפי ההגדרה, $f(0) = 0+1 = 1$ (כי $0 \geq 0$). לכן הדגשנו את הנקודה $(0,1)$ על הגרף בעיגול מלא, וסימנו עיגול ריק בנקודה $(0,0)$, כדי להדגיש שנקודה זו לא שייכת לגרף.

שאלה 15

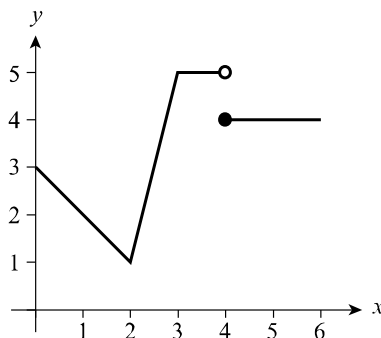
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & 0 \leq x \leq 2 \\ x-1 & 2 < x \leq 4 \end{cases} \quad \text{נתונה הפונקציה}$$

- מהו תחום ההגדרה של f ?
- חשבו את הערכים $f(1), f(2), f(3), f(4)$.
- שרטטו את גרף הפונקציה f .

התשובה בעמוד 238

שאלה 16

כתבו הגדרה מתמטית לפונקציה בעלת הגרף הבא:



התשובה בעמוד 239

דוגמאות נוספות לפונקציות

כדי להעשיר את עולם הדוגמאות שיש ברשותנו לפונקציות ולגרפים שלהן, נתבונן בדוגמאות הבאות:

א. פונקציית הערך המוחלט

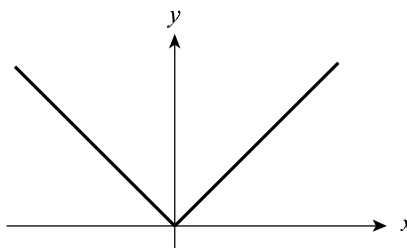
בשיעור 4 הגדרנו את הערך המוחלט של מספר ממשי x כך:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

הערך המוחלט מוגדר עבור כל x ממשי, ומכאן מתקבלת **פונקציית הערך המוחלט**:

$$f(x) = |x|$$

מההגדרה נובע שפונקציה זו היא הדבקה של שתי פונקציות לינאריות: הפונקציה $f_1(x) = -x$ בקטע $(-\infty, 0)$, והפונקציה $f_2(x) = x$ בקטע $[0, \infty)$. גרף הפונקציה נראה כך:



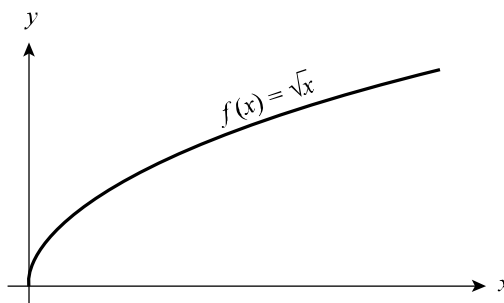
ב. פונקציית השורש

הביטוי $\sqrt{x}$ מוגדר לכל x אי-שלילי. מכאן מתקבלת הפונקציה

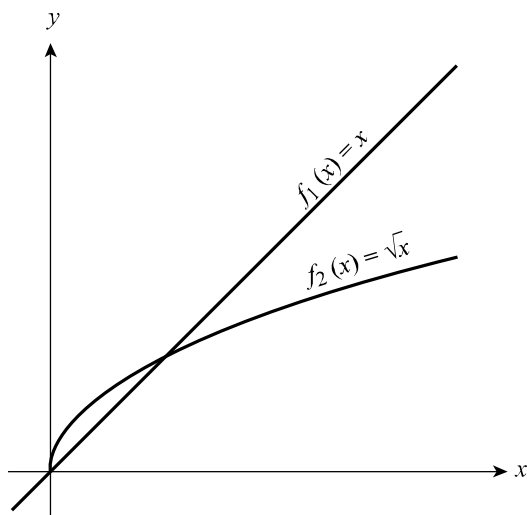
$$f(x) = \sqrt{x}$$

שתחום הגדרתה הוא $[0, \infty)$.

גרף פונקציית השורש נראה כך:



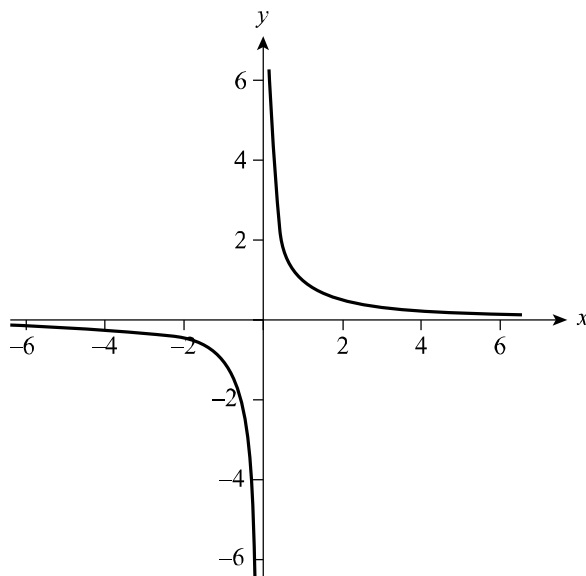
מעניין להתבונן בגרפים של הפונקציות x , $\sqrt{x}$ יחדיו:



ניתן לראות שככל ש- x גדל, ערכי x גדלים במהירות רבה יותר מזו של $\sqrt{x}$.

ג. **הפונקציה $f(x) = 1/x$**

תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x) = 1/x$ הוא הקבוצה $\{x | x \neq 0\}$, כלומר $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.
גרף הפונקציה נראה כך:



צורה זו נקראת **היפרבולה**.

בגרף הפונקציה $f(x) = 1/x$ ניתן לראות תופעה מעניינת הנקראת **אסימפטוטה**. אסימפטוטה היא קו ישר שגורף הפונקציה הולך ומתקרב אליו. בגרף שלפנינו ציר ה- y הוא אסימפטוטה **מימין**: ככל שערכי- x מתקרבים ל- 0 מימין, כך ערך- y הולך וגדל. לדוגמה, אם $x = 0.1$ אז $y = 1/x = 10$, ואם $x = 0.01$ אז $y = 1/x = 100$. לכן ככל שנמשיך לצייר את ציר ה- y כך נמצא נקודות על הגרף שהולכות ומתקרבות אליו. ציר ה- y הוא גם אסימפטוטה **משמאל**: עבור ערכי- x המתקרבים ל- 0 משמאל, מתקבלים ערכי- y שליליים ההולכים וגדלים בערכם המוחלט.

בגרף זה גם ציר ה- x הוא אסימפטוטה, בכיוון החיובי וגם בכיוון השלילי: ככל שערכי- x גדלים בערכם המוחלט, קטן ערכו של y ומתקרב ל- 0 .

תופעות אלה מוסברות באופן מדויק יותר במסגרת תורת הגבולות (שאיננו לומדים כעת), אך חשוב להכיר את ביטוי הגרפי כבר בשלב זה.

ד. פונקציית החלק השלם

לכל מספר ממשי x , **החלק השלם** של x הוא המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול יותר מ- x . מספר זה מסומן כך: $\lfloor x \rfloor$. כדי למצוא את החלק השלם של x , די למקם אותו בין שני מספרים שלמים עוקבים, כלומר למצוא מספר שלם n המקיים $n \leq x < n+1$. מאי־שוויונות אלה נובע באופן מיידי ש- n הוא המספר השלם הגדול ביותר שאינו גדול יותר מ- x , ולכן $\lfloor x \rfloor = n$.

הנה כמה דוגמאות:

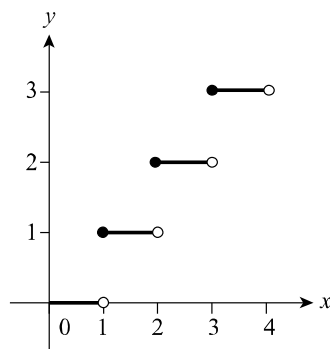
- $\lfloor 1.5 \rfloor = 1$, כי $1 \leq 1.5 < 2$.
- $\lfloor 2.2 \rfloor = 2$, כי $2 \leq 2.2 < 3$.
- $\lfloor 5 \rfloor = 5$, וכללית יותר: אם x שלם אז $\lfloor x \rfloor = x$.
- $\lfloor -0.5 \rfloor = -1$, כי $-1 \leq -0.5 < 0$.

עבור $x > 0$, ניתן לקבל את החלק השלם של x על ידי הצגת x בהצגה עשרונית והשמטת החלק שמימין לנקודה העשרונית. למשל: $\lfloor 17.25 \rfloor = 17$.

כעת נתבונן בפונקציית החלק השלם:

$$f(x) = \lfloor x \rfloor$$

פונקציה זו מוגדרת עבור כל x ממשי. גרף הפונקציה נראה כך:



מגרף זה ניתן לראות כי פונקציית החלק השלם היא הדבקה של פונקציות קבועות: לכל מספר שלם m , הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor$ קבועה בקטע $[m, m+1)$, וערכה שווה ל- m . לדוגמה:

- לכל $0 \leq x < 1$, $\lfloor x \rfloor = 0$.
- לכל $1 \leq x < 2$, $\lfloor x \rfloor = 1$.
- לכל $2 \leq x < 3$, $\lfloor x \rfloor = 2$.

ה. פונקציית החלק השברי

החלק השברי של מספר ממשי x מוגדר ומסומן כך:

$$\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$$

לדוגמה:

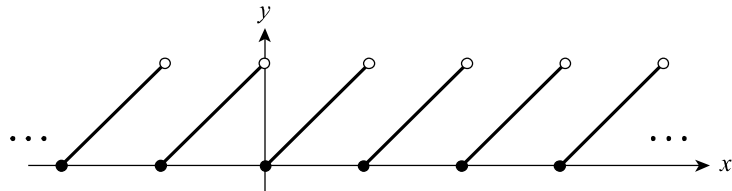
- החלק השברי של 1.23 הוא $\langle 1.23 \rangle = 1.23 - \lfloor 1.23 \rfloor = 1.23 - 1 = 0.23$
- החלק השברי של 5 הוא $\langle 5 \rangle = 5 - \lfloor 5 \rfloor = 0$

לכל $x > 0$, ניתן לקבל את החלק השברי של x על ידי כתיבת x בהצגה עשרונית ולקחת החלק **שמימין** לנקודה העשרונית.

לדוגמה, $\langle 5.33 \rangle = 0.33$.

כעת נתבונן בפונקציית החלק השברי, $f(x) = \langle x \rangle$.

גרף הפונקציה נראה כך:



ואכן, לכל m שלם ולכל x בקטע $[m, m+1)$ מתקיים

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor = x - m$$

ומכך ש- $m \leq x < m+1$ נובע

ולכן $0 \leq f(x) < 1$

לכן בקטע $[m, m+1)$, f היא פונקציה לינארית בעלת שיפוע 1, שערכיה נעים בין 0 ל-1.

שאלה 17

חשבו:

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------|
| א. $\lfloor 0.1 \rfloor$ | ב. $\lfloor 11.23 \rfloor$ | ג. $\lfloor 12/5 \rfloor$ |
| ד. $\lfloor -1.3 \rfloor$ | ה. $\langle 1.3 \rangle$ | ו. $\langle -1.3 \rangle$ |

שאלה 18

שרטטו את גרף הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot x$ בקטע $[0, 3]$.

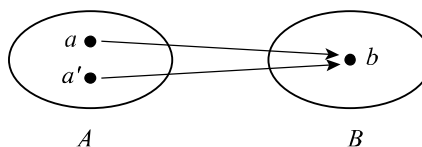
לאחר שהכרנו סוגים רבים של פונקציות ממשיות, נעבור ללמוד על תכונות שונות שיאפשרו לנו לסווג ולנתח את התנהגותן. התכונה הראשונה שנכיר נקראת חד-חד-ערכיות.

פונקציה חד-חד-ערכית

זכור, פונקציה f מקבוצה A לקבוצה B מתאימה לכל איבר $a \in A$ איבר יחיד בקבוצה B , המסומן $f(a)$. ניתן לשאול את השאלה הבאה: האם ידיעת $b = f(a)$ מאפשרת לשחזר את a ?

אפשרות זו מותנית בכך שאין איברים נוספים של הקבוצה A , שהפונקציה f מעבירה ל- b .

כלומר, יש להימנע מהמצב הבא:



במצב שבאיור מתקיים $f(a) = f(a') = b$, ולכן לשאלה "מהו האיבר שערך הפונקציה בו שווה ל- b ?" אין תשובה חד-משמעית. פונקציה $f: A \rightarrow B$, שעבורה מתוך $f(a)$ ניתן לשחזר את a , נקראת **פונקציה חד-חד-ערכית** (ובקיצור: חח"ע).

באופן שקול, ניתן להגדיר תכונה זו כך:

פונקציה $f: A \rightarrow B$ נקראת חד-חד-ערכית אם לכל $a_1, a_2 \in A$ המקיימים $a_1 \neq a_2$ מתקיים: $f(a_1) \neq f(a_2)$.

או כך:

פונקציה $f: A \rightarrow B$ נקראת חד-חד-ערכית אם לכל $a_1, a_2 \in A$ מתקיימת הגרירה הבאה: אם $f(a_1) = f(a_2)$ אז $a_1 = a_2$.

הנה כמה דוגמאות:

א. בבית קפה מוצג התפריט הבא:

קפה 5 שקלים

תה 3 שקלים

עוגה 7 שקלים

נסמן ב- A את קבוצת המוצרים שבתפריט, וב- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ את הפונקציה המתאימה למוצר את מחירו.

הפונקציה f היא חח"ע, כי כל המחירים שבתפריט שונים זה מזה. דבר זה מאפשר לשחזר את המוצר בהינתן מחירו. אם, למשל, נישאל: "מה המוצר שמחירו חמישה שקלים?" נדע להשיב: קפה.

ב. עקב התייכרות מחירי התה בעולם, עלה מחירה של כוס תה לחמישה שקלים. מחירם של שאר המוצרים נותר ללא שינוי. כעת, הפונקציה f שהגדרנו לעיל אינה חח"ע.

$$f(\text{קפה}) = f(\text{תה}) = 5$$

מתקיים:

למרות שתה אינו קפה.

לכן אם נישאל "מה המוצר שמחירו חמישה שקלים?" לא נוכל לתת תשובה חד-משמעית.

$$f(x) = x^2, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ כעת נתבונן בפונקציה הממשית}$$

פונקציה זו אינה חח"ע, כי נוכל למצוא שני מספרים שונים שערכי הפונקציה בהם זהים.

$$f(3) = f(-3) = 9 \text{ למשל:}$$

$$f(x) = 5x - 1, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ נתבונן בפונקציה הליניארית}$$

נוכיח שפונקציה זו היא חח"ע.

$$f(x_1) = f(x_2) \text{ , ונוכיח ש- } x_1 = x_2 \text{ לצורך כך נניח שמתקיים}$$

$$5x_1 - 1 = 5x_2 - 1 \text{ מההנחה נובע:}$$

$$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2 \text{ נוסף 1 לשני האגפים:}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \text{ נחלק ב-5:}$$

כפי שרצינו להוכיח.

מדוגמאות אלה ניתן לראות שכדי להוכיח שפונקציה f היא חח"ע, נוח להוכיח את הגרירה $a_1 = a_2 \Leftarrow f(a_1) = f(a_2)$ וכדי להוכיח שפונקציה f אינה חח"ע, נוח להצביע על קיומם של a_1, a_2 כך ש- $a_1 \neq a_2$ ו- $f(a_1) = f(a_2)$.

שאלה 19

בדקו לגבי כל פונקציה אם היא חח"ע:

$$א. f(x) = 3x + 2$$

$$ב. f(x) = 1/x$$

$$ג. f(x) = |x|$$

$$ד. f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \text{ נתונה על ידי } f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$$

ה. בהינתן $A =$ קבוצת המילים בעברית בספר זה, $B =$ קבוצת האותיות בעברית,

$$f: A \rightarrow B \text{ מוגדרת על ידי } f(a) = \text{האות הראשונה במילה } a.$$

ו. בהינתן $A =$ קבוצת המילים בעברית בספר זה, $B =$ קבוצת צירופי האותיות בעברית,

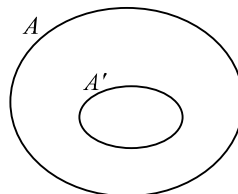
$$f: A \rightarrow B \text{ מוגדרת על ידי } f(a) = \text{המילה } a \text{ בהיפוך סדר האותיות.}$$

שאלה 20

א. כיצד ניתן לבדוק אם פונקציה ממשיית היא חח"ע או לא, לפי הגרף שלה?
ב. הדגימו איך נובע משיקול זה ש- $f(x) = x^2$ אינה חח"ע.

צמצום של פונקציה

נתבונן במצב שבו נתונה קבוצה A , ונתונה קבוצה A' שכל איבריה שייכים ל- A :

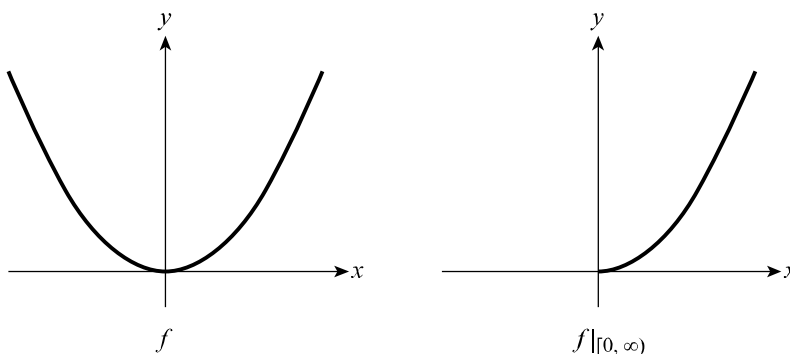


במצב זה נאמר ש- A' היא **קבוצה חלקית** (או תת-קבוצה) של A , ונסמן זאת כך: $A' \subseteq A$.
כעת נניח שנתונה פונקציה $f: A \rightarrow B$.

לכל איבר $a \in A'$ מתקיים גם $a \in A$ ולכן מוגדר הערך $f(a)$ ומתקיים $f(a) \in B$.
באופן זה מתקבלת פונקציה מ- A' ל- B הנקראת **הצמצום של f ל- A'** . פונקציה זו מסומנת כך: $f|_{A'}$.

לדוגמה, נתבונן בפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. הקבוצה $[0, \infty)$ (קבוצת המספרים האי-שליליים) היא קבוצה חלקית של $\mathbb{R}$. נתבונן בצמצום של f לקבוצה זו: $f|_{[0, \infty)}$.
מתקבלת הפונקציה $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ המוגדרת על ידי $g(x) = x^2$.

נתבונן בגרפים של הפונקציה f ושל הצמצום שלה:



גרף הפונקציה המצומצמת מתקבל על ידי התמקדות בתחום הקטן יותר ומחיקת חלק הגרף שלא שייך אליו.

נבחין שהפונקציה $f(x) = x^2$, שתחומה הוא קבוצת המספרים הממשיים, אינה חח"ע (ראו, למשל, שאלה 20), אך הצמצום שלה לקבוצה $[0, \infty)$ הוא פונקציה חח"ע.

ניתן לראות זאת מגרף הפונקציה המצומצמת שמוצג לעיל: כל ישר המקביל לציר ה- x נפגש עם הגרף בנקודה אחת לכל היותר.

ניתן גם להוכיח זאת במדויק: אם $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ ו- $f(x_1) = f(x_2)$ אז $x_1^2 = x_2^2$, ומכיוון ש- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, נובע ש- $x_1 = x_2$.

◁ ראו שאלה 43 בסוף שיעור 5.

שאלה 21

נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 4x + 3$. בדקו, לפי גרף הפונקציה:

א. האם f חח"ע?

ב. האם $f|_{[-1, \infty)}$ חח"ע?

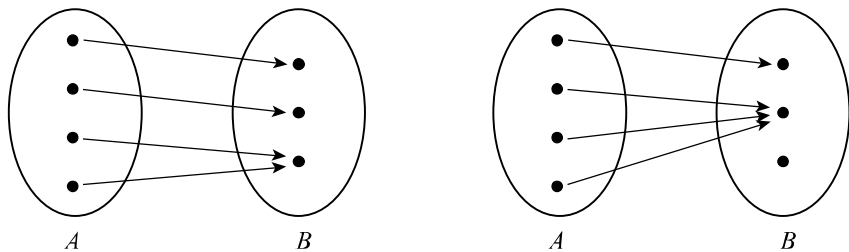
ג. האם $f|_{(-\infty, -1)}$ חח"ע?

התשובה בעמוד 242

פונקציה על

בהינתן פונקציה $f : A \rightarrow B$, נאמר ש- f היא **על** אם כל איבר של B מתקבל כערך של הפונקציה f .

נתבונן, לדוגמה, בדיאגרמות החיצים הבאות:



הפונקציה בדיאגרמה שמשמאל היא על, כי לכל נקודה המסמלת איבר בקבוצה B מגיע לפחות חץ אחד מהקבוצה A .

הפונקציה בדיאגרמה שממיין אינה על, כי יש נקודה המסמלת איבר של B אשר לא מגיע אליה אף חץ מהקבוצה A .

כשמדובר בפונקציות ממשיות, כדי לבדוק אם $f : A \rightarrow B$ היא **על**, יש לבדוק אם לכל $b \in B$ קיים פתרון למשוואה $f(a) = b$ המקיים את התנאי $a \in A$.

נתבונן, למשל, בפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$. פונקציה זו אינה על, כי עבור $b = -1$ לא קיים פתרון למשוואה $f(a) = b$: אכן, לא קיים מספר ממשי a שעבורו $a^2 = -1$, כי תמיד מתקיים $a^2 \geq 0$.

כעת נתבונן בפונקציה $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ המוגדרת כך: $f(x) = |x|$.

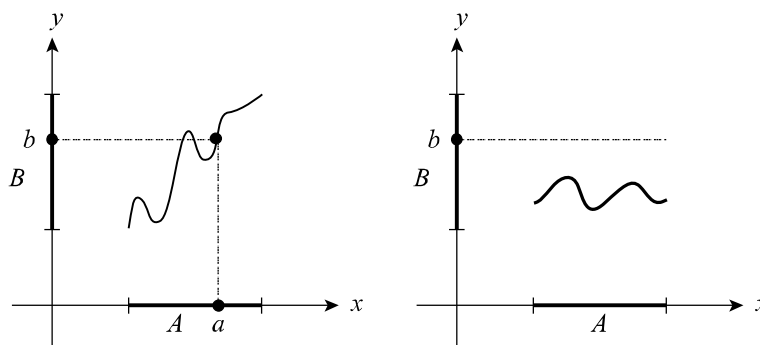
ראשית, נוודא שהפונקציה מוגדרת היטב:

לכל $x \in [-1, 1]$ מתקיים $-1 \leq x \leq 1$ ולכן $0 \leq x \leq 1$ או $-1 \leq x < 0$. במקרה הראשון מתקיים $f(x) = |x| = x$ (לפי הגדרת הערך המוחלט) ולכן $0 \leq f(x) \leq 1$. במקרה השני מתקיים $f(x) = |x| = -x$, ומההנחה $-1 \leq x < 0$ נובע $0 < -x \leq 1$, לכן $0 \leq f(x) \leq 1$ ובפרט $0 \leq f(x) \leq 1$. לכן בכל מקרה $f(x) \in [0, 1]$, והפונקציה מוגדרת היטב.

כעת נוכיח ש- f היא על: עלינו להוכיח שלכל $b \in [0, 1]$ קיים $a \in [-1, 1]$ כך ש- $f(a) = b$. לפי הגדרת f , מכיוון ש- $b \geq 0$, מתקיים $f(b) = |b| = b$. כמו כן, $b \in [0, 1]$ ולכן $b \in [-1, 1]$. לכן הבחירה $a = b$ עונה על הדרישות. בכך וידאנו ש- f היא על.

מהדוגמה האחרונה ניתן לראות שעובדת היותה של הפונקציה על תלויה בדרך שבה הגדרנו את טווח הפונקציה. אילו היינו מגדילים את הטווח ומגדירים $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = |x|$, אז f לא היתה על, כי למשל $b = 2$ אינו ערך של הפונקציה עבור איברים בתחום הגדרתה, כלומר לא קיים $a \in [-1, 1]$ כך ש- $|a| = 2$. ניתן להכריע בשאלה אם פונקציה ממשיית $f : A \rightarrow B$ היא על מתוך התבוננות בגרף הפונקציה. כדי לעשות זאת, יש להתוות את טווח הפונקציה, B , על ציר ה- y , ולבדוק אם כל ישר מקביל לציר ה- x , העובר דרך נקודה בטווח, פוגש את גרף הפונקציה בנקודה כלשהי.

נתבונן בפונקציות באיורים הבאים:



בפונקציה משמאל, מכל נקודה b שבטווח, הישר המקביל לציר ה- x העובר דרכה פוגש את גרף הפונקציה בנקודה מסוימת (או בכמה נקודות), ובהתאם ניתן למצוא a כך ש- $f(a) = b$. לכן הפונקציה היא על. בפונקציה מימין, ניתן למצוא b בטווח כך שהישר המתאים לא פוגש את גרף הפונקציה, ולכן b אינו ערך של הפונקציה. לכן הפונקציה אינה על.

שאלה 22

בדקו, לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות, אם היא חח"ע ואם היא על:

א. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$

ב. $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x + 1$

ג. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$

ד. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x - 1 & x \geq 0 \end{cases}$

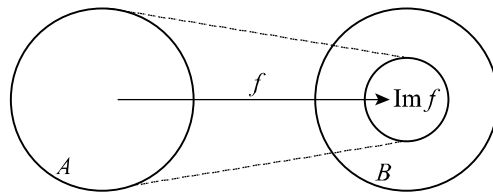
התשובה בעמוד 243

תמונה של פונקציה

בהינתן פונקציה $f: A \rightarrow B$, **תמונת הפונקציה** (המסומנת $\text{Im } f$) היא קבוצת הערכים שמקבלת הפונקציה f , כלומר:

$$\text{Im } f = \{f(a) \mid a \in A\}$$

מכיוון שערכי הפונקציה f שייכים לקבוצה B , $\text{Im } f$ היא קבוצה חלקית של B : $\text{Im } f \subseteq B$. התרשים הבא מתאר מצב זה:



הנה כמה דוגמאות:

א. נתבונן בפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

תמונת הפונקציה היא אוסף כל המספרים מהצורה x^2 , עבור x ממשי. כל מספר כזה הוא אי-שלילי (לפי חוקי הסימנים). ולהפך: כל מספר אי-שלילי, $b \geq 0$, ניתן להצגה בצורה $b = x^2$:

$$b = (\sqrt{b})^2$$

קיבלנו כי תמונת f היא קבוצת המספרים האי-שליליים:

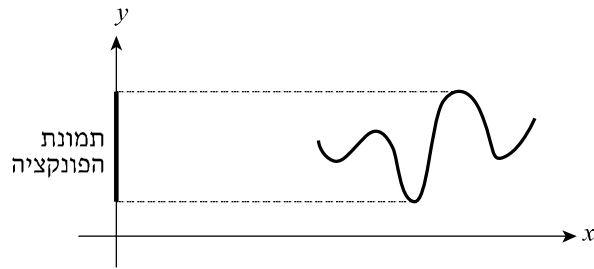
$$\text{Im } f = [0, \infty)$$

ב. נסמן ב־ A את קבוצת האנשים בעולם שיש להם קו טלפון אחד. לכל קו טלפון יש מספר, שאם נכתוב אותו ברצף, נקבל מספר טבעי.

נגדיר פונקציה $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ כך: מספר הטלפון של a $f(a)$

תמונת הפונקציה היא קבוצת כל מספרי הטלפון של בעלי קו טלפון יחיד.

כשמדובר בפונקציה ממשית, ניתן להבין מהי תמונת הפונקציה מתוך התבוננות בגרף הפונקציה: התמונה היא קבוצת המספרים הממשיים המתקבלת מהיטל גרף הפונקציה על ציר ה־ y .



ואכן, תמונת הפונקציה היא אוסף ערכי הפונקציה שהוא אוסף שיעורי- y של הנקודות $(x, f(x))$ על גרף הפונקציה. שיעור- y של נקודה מתקבל מהטלתה אל ציר ה- y .

בשלב זה מוטב שנעמוד על ההבחנה בין שני מושגים קרובים, אך שונים: **טווח הפונקציה ותמונת הפונקציה**.

טווח הפונקציה הוא הקבוצה שעליה הצהרנו כיעד של ערכי הפונקציה. הטווח של פונקציה $f: A \rightarrow B$ הוא הקבוצה B . תמונת הפונקציה היא אוסף ערכי הפונקציה שמתקבלים בפועל:

$$\text{Im } f = \{f(a) | a \in A\}$$

תמונת הפונקציה היא תמיד קבוצה חלקית של הטווח: $\text{Im } f \subseteq B$. יתרה מכך, מתקיים:

טענה

תמונת הפונקציה שווה לטווח הפונקציה אם ורק אם הפונקציה היא על.

הוכחה

בהינתן פונקציה $f: A \rightarrow B$, השוויון $\text{Im } f = B$ שקול לכך ש- $B = \{f(a) | a \in A\}$, כלומר שכל איבר של B הוא מהצורה $f(a)$ עבור $a \in A$ מסוים, כלומר ש- f היא על. $\square$

מטענה זו נובע שאם פונקציה מסוימת אינה על, ניתן לשנות את טווח הפונקציה כך שהפונקציה תהיה על. כל שיש לעשות הוא להגדיר את טווח הפונקציה כתמונת הפונקציה. לדוגמה, הפונקציה המוכרת לנו $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, אינה על, אך אם נגדיר $g: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $g(x) = x^2$, נקבל ש- g היא על. זאת מפני שהקבוצה $[0, \infty)$ היא תמונת הפונקציה f , ולכן גם תמונת הפונקציה g .

שאלה 23

מצאו את התמונה של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x + 1$ ב. $f(x) = x^2 - 3x + 1$

ג. $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ ד. $f(x) = x + 1$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

ה. $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ו. $f(x) = -x$, $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

שאלה 24

נתונה פונקציית הערך המוחלט: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$.
איך ניתן לשנות את טווח הפונקציה כך שתהיה על?

התשובה בעמוד 246

פונקציה זוגית/אי־זוגית

פונקציה ממשית f נקראת **זוגית** אם מתקיים השוויון

$$f(-x) = f(x)$$

לכל x בתחום ההגדרה של f .

לדוגמה, הפונקציה $f(x) = x^2$ היא זוגית כי

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

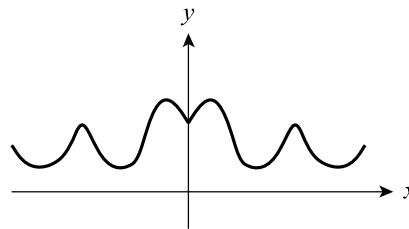
לכל x ממשי.

יתרה מכך, אם n הוא מספר זוגי, אז הפונקציה $f(x) = x^n$ היא זוגית. עובדה זו נובעת מחוקי החזקות:

$$f(-x) = (-x)^n = ((-1) \cdot x)^n = (-1)^n \cdot x^n = x^n$$

כי $(-1)^n = 1$ לכל n זוגי.

עובדת היות הפונקציה f זוגית מוצאת את ביטוייה בגרף הפונקציה. מהשוויון $f(x) = f(-x)$ נובע שנקודה (x, y) נמצאת על גרף הפונקציה אם ורק אם הנקודה $(-x, y)$ נמצאת על הגרף. לכן גרף הפונקציה סימטרי ביחס לציר ה־ y . נוכל לקבל את חלק הגרף שמשמאל לציר ה־ y על ידי שיקוף חלק הגרף שמימין לציר ה־ y , ביחס לציר ה־ y . לדוגמה:



באופן דומה, נגדיר מהי פונקציה **אי־זוגית**:

פונקציה ממשית f נקראת **אי־זוגית** אם מתקיים

$$f(-x) = -f(x)$$

לכל x בתחום ההגדרה של f .

נוכיח כי אם n הוא מספר אי־זוגי, אזי $f(x) = x^n$ היא פונקציה אי־זוגית: כמקודם,

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n$$

עבור n אי־זוגי, $(-1)^n = -1$ ולכן $f(-x) = -x^n = -f(x)$.

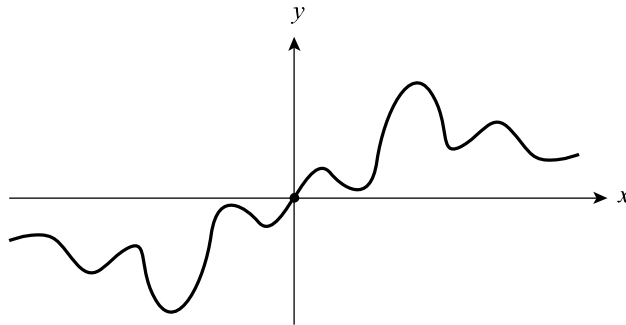
בגרף של פונקציה אי־זוגית, חלק הגרף שמשמאל לציר ה־ y מתקבל מהחלק הימני על ידי פעולת שיקוף כפולה: ביחס לציר ה־ x , ואחר כך ביחס לציר ה־ y . דבר זה נובע מכך שנקודה (x, y) נמצאת על גרף הפונקציה f אם ורק אם הנקודה $(-x, -y)$ נמצאת על הגרף.

שאלה 25

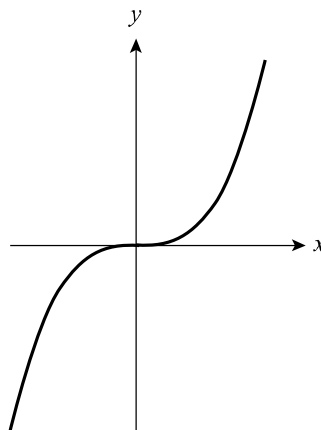
הוכיחו שאם f פונקציה אי־זוגית המוגדרת בנקודה $x = 0$, אז $f(0) = 0$.

התשובה בעמוד 246

הגרף של פונקציה אי־זוגית טיפוסית נראה אפוא כך:



לדוגמה, גרף הפונקציה $f(x) = x^3$ נראה כך:



פונקציה עולה/יורדת

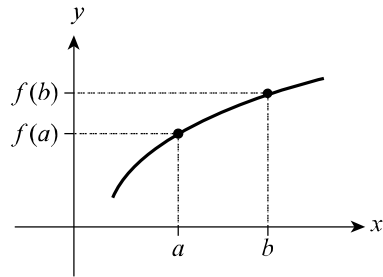
פונקציה ממשית f נקראת **עולה** אם מתקיים לגביה התנאי הבא:

$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$

תנאי זה נדרש להתקיים עבור כל a ו־ b בתחום ההגדרה של f .

◁ באופן מילולי נוכל לבטא את התנאי הזה כך: כשעריך המשתנה גדל, גם ערך הפונקציה גדל.

במונחי הגרף של הפונקציה, f היא עולה אם הגרף שלה מטפס מעלה (כלומר בכיוון החיובי של ציר ה- y) ככל שמתבוננים ימינה יותר (כלומר בכיוון החיובי של ציר ה- x) בגרף:



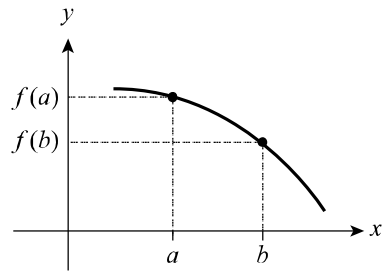
באופן דומה, פונקציה ממשית f נקראת **יורדת** אם מתקיים:

$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

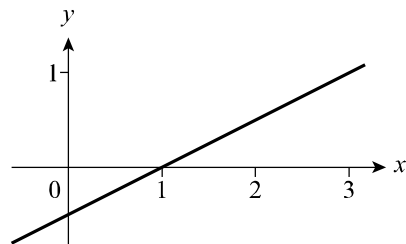
◁ באופן מילולי: כשערך המשתנה גדל, ערך הפונקציה **קטן**.

לכל a ו- b בתחום ההגדרה של f .

מבחינה גרפית, פונקציה יורדת טיפוסית תיראה כך:



לדוגמה, נתבונן בפונקציה הלינארית $f(x) = (x-1)/2$:



נוכיח ש- f עולה:

נניח ש- x_1, x_2 מספרים ממשיים וש- $x_1 < x_2$. נחסר 1: $x_1 - 1 < x_2 - 1$. נחלק ב-2: $(x_1 - 1)/2 < (x_2 - 1)/2$, וקיבלנו $f(x_1) < f(x_2)$, כנדרש.

שאלה 26

תהי f פונקציה לינארית. הוכיחו שאם יש ל- f שיפוע חיובי אז f עולה, ואם יש ל- f שיפוע שלילי אז f יורדת.

התשובה בעמוד 246

שאלה 27

א. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$ עולה.
ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x) = -\sqrt{x}$ יורדת.

התשובה בעמוד 247

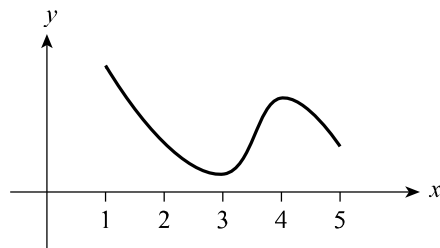
שאלה 28

תהי f פונקציה ממשית, ונניח ש- x_1, x_2 בתחום ההגדרה של f .
א. הוכיחו שאם f עולה אז קיימת שקילות $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
ב. הוכיחו שאם f יורדת אז קיימת שקילות $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

התשובה בעמוד 247

תחומי עלייה וירידה

לא כל הפונקציות שומרות על מגמה קבועה בתחום הגדרתן: עלייה או ירידה. נתבונן, למשל, בפונקציה הבאה:



ניתן לראות שערכי הפונקציה נמצאים במגמת ירידה בקטע $[1, 3]$, במגמת עלייה בקטע $[3, 4]$, ושוב במגמת ירידה בקטע $[4, 5]$. באופן מתמטי נגדיר תופעה זאת כך:

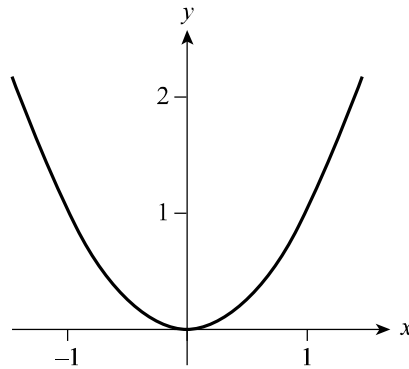
פונקציה f נקראת **עולה בקטע** I (החלקי לתחום הגדרתה) אם הצמצום $f|_I$ הוא פונקציה עולה.

הפונקציה נקראת **יורדת בקטע** I אם $f|_I$ הוא פונקציה יורדת.

במילים אחרות, f עולה ב- I אם לכל $x_1, x_2 \in I$ המקיימים $x_1 < x_2$, מתקיים $f(x_1) < f(x_2)$; f יורדת ב- I אם לכל $x_1, x_2 \in I$ כנ"ל מתקיים $f(x_1) > f(x_2)$.

חלוקת תחום ההגדרה של f לקטעים שבהם f שומרת על מגמה קבועה (עלייה/ירידה) נקראת **מציאת תחומי העלייה והירידה של f** .

נתבונן, למשל, בפונקציה $f(x) = x^2$:



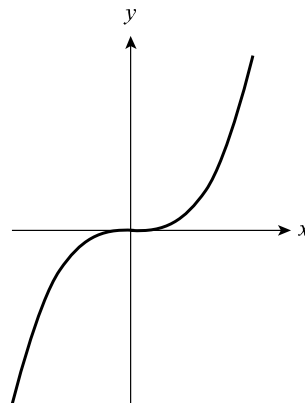
ניתן לראות שהפונקציה עולה בקטע $[0, \infty)$, ויורדת בקטע $(-\infty, 0]$. נוכיח זאת במדויק.

- **הפונקציה עולה ב־ $[0, \infty)$.**
יהיו $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ מספרים המקיימים $x_1 < x_2$.
מההנחה על x_1, x_2 נובע ש־ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$. לכן ניתן להעלות את האי־שוויון $x_1 < x_2$ בריבוע. נקבל $x_1^2 < x_2^2$, כלומר $f(x_1) < f(x_2)$, כנדרש.
- **הפונקציה יורדת ב־ $(-\infty, 0]$.**
יהיו $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ מספרים המקיימים $x_1 < x_2$.
אז $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$, ולכן:
 $-x_1 \geq 0, -x_2 \geq 0$,
מתכונת היפוך האי־שוויון נקבל:
 $-x_1 > -x_2$
כעת ננצל את מה שכבר הוכחנו: f עולה ב־ $[0, \infty)$. לכן:

$$f(-x_1) > f(-x_2)$$

אבל הפונקציה $f(x) = x^2$ היא זוגית, ולכן $f(-x_1) = f(x_1)$ ו־ $f(-x_2) = f(x_2)$.
מכאן נקבל $f(x_1) > f(x_2)$.
□

כעת נתבונן בפונקציה $f(x) = x^3$:



שאלה 29

הוכיחו שהפונקציה $f(x) = x^3$ עולה.

הדרכה: הוכיחו תחילה שהפונקציה עולה בקטעים $[0, \infty)$ ו- $(-\infty, 0]$.

ניתן להכליל את התופעות שהתגלו לחזקות גבוהות יותר.

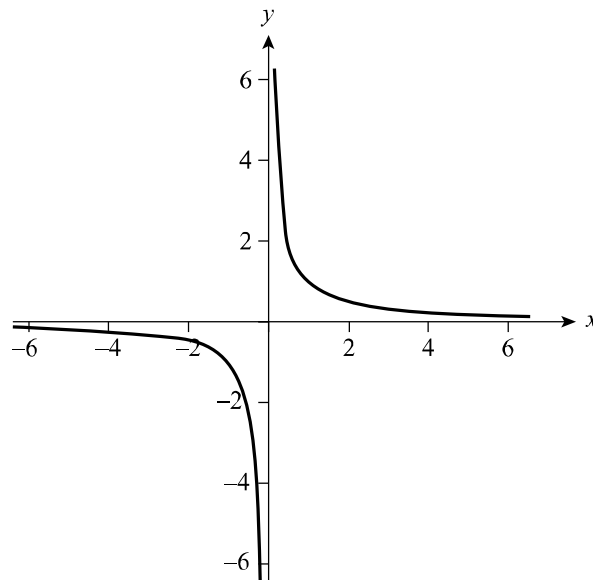
שאלה 30

יהי n מספר טבעי, ונתבונן בפונקציה $f(x) = x^n$.

א. הוכיחו שאם n מספר זוגי, אז f עולה ב- $[0, \infty)$ ויורדת ב- $(-\infty, 0]$.

ב. הוכיחו שאם n אי-זוגי אז f עולה בכל הישר.

כדוגמה נוספת נתבונן בגרף הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x}$:



שאלה 31

תהי $f(x) = 1/x$.

א. הוכיחו ש- f פונקציה אי-זוגית.

ב. הוכיחו ש- f יורדת ב- $(-\infty, 0)$ וב- $(0, \infty)$.

ג. האם f יורדת בכל תחום הגדרתה?

פונקציות מונוטוניות

לפונקציה השומרת על מגמה קבועה (כלומר: עולה או יורדת) בכל תחום הגדרתה נקרא

פונקציה מונוטונית.

אם פונקציה f שומרת על מגמה קבועה בקטע I מסוים, נאמר ש- f **מונוטונית ב- I** .

התשובה בעמוד 248

התשובה בעמוד 248

התשובה בעמוד 249

בדוגמאות קודמות הכרנו פונקציות מונוטוניות – למשל, הפונקציות $(x-1)/2$ (עולה), x^3 (עולה), $-\sqrt{x}$ (יורדת), וכן כל פונקציה לינארית שאינה קבועה (עולה אם שיפועה חיובי ויורדת אם הוא שלילי). כמו כן, ראינו איך ניתן לחלק את תחום ההגדרה לתחומי עלייה וירידה. תחומים אלה הם קטעים שבהם הפונקציה מונוטונית.

נוכיח את התכונה הבאה:

כל פונקציה מונוטונית היא חח"ע.

הוכחה

תהי f פונקציה מונוטונית. לפי ההגדרה, f היא פונקציה עולה או פונקציה יורדת. נניח ש- f עולה, ונניח ש- x_1 ו- x_2 שייכים לתחום ההגדרה של f , וש- $x_1 \neq x_2$. נתבונן בנפרד במקרים הבאים:

- אם $x_1 < x_2$, אז $f(x_1) < f(x_2)$ (כי f עולה), ובפרט $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- אם $x_1 > x_2$, אז $f(x_1) > f(x_2)$ (כי f עולה), ובפרט $f(x_1) \neq f(x_2)$.

לכן בכל המקרים $f(x_1) \neq f(x_2)$.

ההוכחה למקרה ש- f יורדת דומה. במקרה זה יתקיים:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

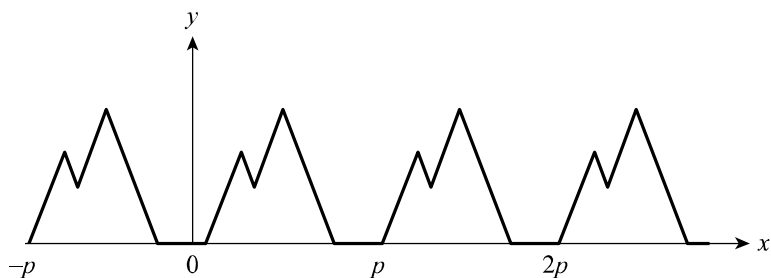
$$x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

□

ושוב, $f(x_1) \neq f(x_2)$.

פונקציות מחזוריות

נתבונן בפונקציה הבאה:



באיור זה p הוא מספר חיובי מסוים.

ניתן לראות שגרף הפונקציה הוא מחזורי: מתוך גרף הפונקציה בקטע $[0, p]$ נוכל לשחזר את גרף הפונקציה המלא על ידי הדבקת עותקים של הגרף המצומצם לאורך הישר.

מתמטית, תופעה זו מוגדרת כך:

פונקציה ממשית f נקראת **מחזורית** אם קיים מספר ממשי $p > 0$ כך שהשוויונות

$$f(x - p) = f(x) = f(x + p)$$

מתקיימים לכל x בתחום ההגדרה של f .

המספר p הקטן ביותר שעבורו שוויונות אלה מתקיימים נקרא **המחזור** של הפונקציה f .

נשים לב שאם f פונקציה מחזורית בעלת מחזור p , אז לכל x מתקיים:

$$f(x) = f(x + p) = f(x + p + p) = f(x + p + p + p) = \dots$$

$$f(x) = f(x - p) = f(x - p - p) = f(x - p - p - p) = \dots$$

וכן

$$\boxed{f(x) = f(x + np)}$$

ולכן לכל n שלם מתקיים:

בשיעור 9 (בנושא טריגונומטריה) נכיר דוגמאות רבות לפונקציות מחזוריות. בינתיים נכיר

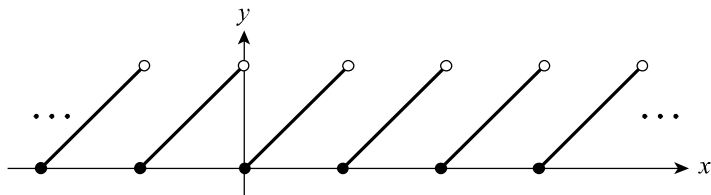
את הדוגמה הבאה:

$$f(x) = \langle x \rangle$$

נתבונן בפונקציה

(החלק השברי של x – ראו בעמוד 74).

כזכור, גרף הפונקציה נראה כך:



טענה

הפונקציה $f(x) = \langle x \rangle$ מחזורית, ומחזוריה הוא 1.

הוכחה

נוכיח שלכל x מתקיים $\langle x \rangle = \langle x + 1 \rangle$.

נסמן $n = \lfloor x \rfloor$ (החלק השלם של x – ראו בעמוד 73).

מהגדרת החלק השלם נובע:

$$n \leq x < n + 1$$

לכן:

$$n + 1 \leq x + 1 < n + 2$$

מכאן נובע מיידית

$$\lfloor x + 1 \rfloor = n + 1$$

לכן

$$\langle x + 1 \rangle = (x + 1) - \lfloor x + 1 \rfloor = x + 1 - (n + 1) = x - n = x - \lfloor x \rfloor = \langle x \rangle$$

הוכחנו ש- $\langle x \rangle = \langle x + 1 \rangle$. משוויון זה נובע (בהצבת $x - 1$ במקום x):

$$\langle x - 1 \rangle = \langle x \rangle$$

לבסוף, נוכיח שלא קיים $0 < p < 1$ המקיים $\langle x + p \rangle = \langle x \rangle$ לכל p : אילו היה קיים p כזה, היה מתקיים בפרט (עבור $x = 0$): $\langle 0 + p \rangle = \langle 0 \rangle$, כלומר $\langle p \rangle = 0$. אבל מכך ש- $0 < p < 1$, נקבל ש- $\lfloor p \rfloor = 0$, לכן $\langle p \rangle = p - \lfloor p \rfloor = p - 0 = p$. לכן $p = 0$, בסתירה להנחה. בכך הראינו שלא קיים p כזה. $\square$

שאלה 32

הוכיחו שהפונקציה $f(x) = (\langle x \rangle)^2$ היא מחזורית. כיצד נראה הגרף של פונקציה זו?

התשובה בעמוד 250

פעולות בפונקציות

עד כה, הכרנו את מושג הפונקציה ולמדנו על מאפיינים שונים של פונקציות (חד-חד ערכיות, על, זוגיות, מונוטוניות, מחזוריות). כעת נכיר דרכים לביצוע פעולות בין פונקציות, שבאמצעותן ניתן לקבל פונקציות חדשות מפונקציות קיימות.

פעולות חשבוניות בין פונקציות

בהינתן פונקציות ממשיות f, g , נתבונן בביטוי $f(x) + g(x)$. ביטוי זה מוגדר לכל x שבו מוגדרים $f(x)$ ו- $g(x)$. באופן זה מתקבלת פונקציה חדשה, שסימונה הוא $f + g$ וערכיה הם:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

מטבע הדברים, נקרא לפונקציה $f + g$ **סכום הפונקציות f ו- g** .

באופן דומה מוגדרות **פונקציית ההפרש $f - g$** ו**פונקציית המכפלה fg** :

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

לכל n טבעי, נגדיר את החזקה f^n כך:

$$(f^n)(x) = (f(x))^n$$

כעת נגדיר את פונקציית המנה f/g :

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

תחום ההגדרה של f/g הוא קבוצת המספרים x שעבורם $f(x)$ ו- $g(x)$ מוגדרים וכן $g(x) \neq 0$.

שאלה 33

$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x+3}$$

נתונות הפונקציות

מצאו את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות הבאות ובטאו אותה באופן מפורש:

ג. $f \cdot g$

ב. $f - g$

א. $f + g$

ה. $f^2 - g$

ד. f/g

התשובה בעמוד 250

הרכבת פונקציות

בהינתן פונקציות ממשיות f ו- g , נתבונן בביטוי הבא:

$$f(g(x))$$

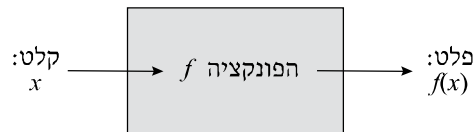
משמעות ביטוי זה היא הצבת ערך הפונקציה g בפונקציה f .

באופן זה מתקבלת פונקציה הנקראת **ההרכבה של f עם g** , ומסומנת כך: $f \circ g$.
ערכי הפונקציה נתונים על ידי הנוסחה

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

תחום ההגדרה של פונקציית ההרכבה $f \circ g$ הוא קבוצת המספרים x שעבורם $g(x)$ מוגדר, ושייך לתחום ההגדרה של f .

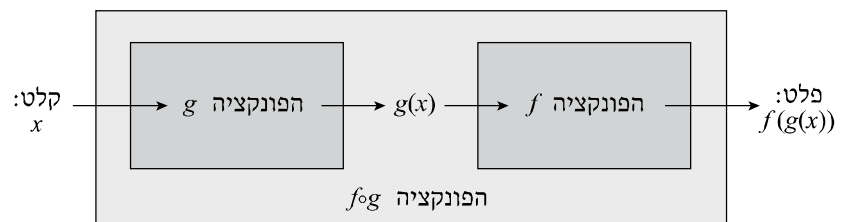
לצורך הבנת ההגדרה, נוח לחשוב על פונקציה f כעל מכונה המקבלת קלט (מספר x) ומחזירה פלט (הערך $f(x)$):



בהינתן שתי פונקציות f ו- g , המיוצגות כמכונות, נבנה מהן מכונה חדשה $f \circ g$ הפועלת כך:

- הקלט x נכנס אל המכונה g .
- הפלט של המכונה g מוזן כקלט אל המכונה f .
- הפלט של המכונה f הוא הפלט של המכונה $f \circ g$ כולה.

תהליך זה מוצג בתרשים הבא:



כדי לחשב בפועל את פונקציית ההרכבה $f \circ g$, נתבונן בביטוי ל- $f(x)$ ונחליף בו כל מופע של x בביטוי ל- $g(x)$. במילים אחרות, נציב $x \rightarrow g(x)$.

לדוגמה:

א. אם $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = x + 1$, אז $f(g(x)) = (x + 1)^2$.

ב. אם $f(x) = x^2 + x$ ו- $g(x) = \frac{1}{x + 3}$, אז $f(g(x)) = \left(\frac{1}{x + 3}\right)^2 + \frac{1}{x + 3}$.

◁ דרך זו היא ארוכה יותר, אך חסינה יותר מטעויות חישוב.

דרך נוספת לחשב פונקציית הרכבה היא בעזרת משתנה־עזר, t . כותבים תחילה ביטוי עבור $f(t)$ על ידי החלפת x ב- t . לאחר מכן מציבים בביטוי שהתקבל $t = g(x)$.

בדוגמה ב לעיל נכתוב $f(t) = t^2 + t$ ונציב $t = g(x) = \frac{1}{x + 3}$:

$$f(g(x)) = g(x)^2 + g(x) = \left(\frac{1}{x + 3}\right)^2 + \frac{1}{x + 3}$$

שאלה 34

חשבו בכל אחד מהמקרים את פונקציית ההרכבה $f \circ g$, וציינו מהו תחום הגדרתה.

א. $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x$

ב. $f(x) = \frac{x}{x - 1}$, $g(x) = |x|$

ג. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3x - 5$

ד. $f(x) = g(x) = \frac{1}{x}$

ה. $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$, $g(x) = \frac{2x + 1}{x + 3}$

ו. $f(x) = 2x$, $g(x) = x^3$

התשובה בעמוד 252

מעניין להשוות בין תוצאות סעיף א וסעיף ו בשאלה האחרונה. לפיהן, עבור $g(x) = 2x$, $f(x) = x^3$:

$$(f \circ g)(x) = (2x)^3 = 8x^3$$

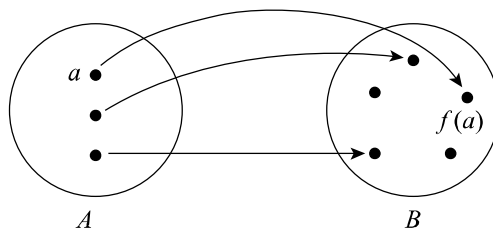
$$(g \circ f)(x) = 2x^3$$

מהשוואה זו נובע שפעולת ההרכבה אינה פעולה חילופית: בדרך כלל $f \circ g \neq g \circ f$.

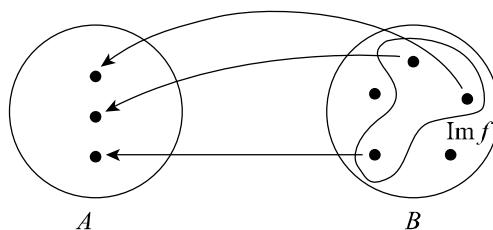
פונקציה הפוכה

אחד האפיונים שהכרנו למושג 'פונקציה חד־חד־ערכית' היה: פונקציה $f : A \rightarrow B$ היא חד־חד־ערכית אם ניתן לשחזר איבר $a \in A$ מערך הפונקציה $f(a)$.

נניח, לדוגמה, שהפונקציה f מיוצגת על ידי דיאגרמת החיצים הבאה:



כדי לשחזר מתוך $f(a)$ את a , עלינו להפוך את כיוון החיצים. בדרך זו נקבל פונקציה שתחום הגדרתה הוא תמונת f , והטווח שלה הוא:



פונקציה זו נקראת **הפונקציה ההפוכה ל- f** ומסומנת כך: f^{-1} .
כאמור, f^{-1} היא בעלת התחום והטווח הבאים:

$$f^{-1} : \text{Im } f \rightarrow A$$

נתבונן, למשל, בדוגמה שראינו בעבר: בבית קפה מוצג התפריט

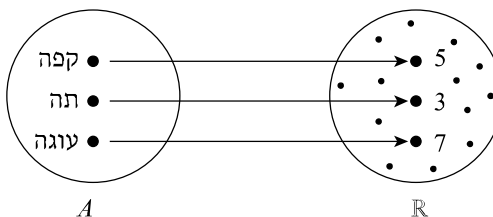
קפה 5 שקלים

תה 3 שקלים

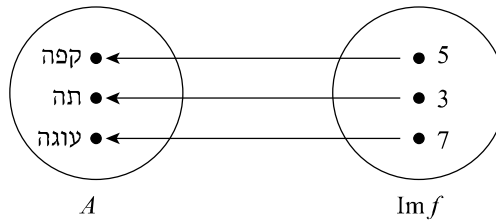
עוגה 7 שקלים

נסמן $A =$ קבוצת המוצרים שבתפריט $= \{\text{קפה, תה, עוגה}\}$ ו- $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציית המחיר.

f היא חח"ע, ומיוצגת על ידי דיאגרמת החיצים:



הפונקציה ההפוכה, $f^{-1} : \{3, 5, 7\} \rightarrow A$, מיוצגת על ידי הדיאגרמה:



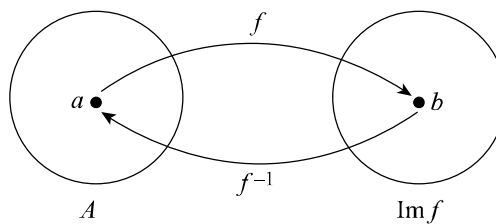
בעזרת הפונקציה ההפוכה נוכל לענות בקלות על השאלה "מה עולה חמישה שקלים?". התשובה היא $f^{-1}(5) = \text{קפה}$.

נשים לב לעובדה ש- f חח"ע היא חיונית להגדרת הפונקציה ההפוכה. אם היו שני מוצרים בעלי אותו מחיר, הגדרת הפונקציה ההפוכה לא היתה חד-משמעית.

באופן כללי נוכל לאפיין את הדרישות מהפונקציה ההפוכה כך:

$$f(a) = b \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$$

שקילות זו נדרשת להתקיים עבור $a \in A$ ו- $b \in \text{Im } f$. היא מייצגת את העובדה ש- f^{-1} משחזרת את a מתוך $f(a)$, כפי שניתן לראות מהדיאגרמה הבאה:



משקילות זו נובעים השוויונות הבאים:

$$f^{-1}(f(a)) = a$$

(לכל $a \in A$)

$$f(f^{-1}(b)) = b$$

(לכל $b \in \text{Im } f$)

פונקציה הפוכה לפונקציה ממשית

נניח ש- f היא פונקציה ממשית חח"ע. כדי למצוא את f^{-1} , עלינו לפתור את המשוואה

$$f(x) = y$$

תוך התייחסות ל- y כנתון, ול- x כנעלם.

$$x = f^{-1}(y)$$

הפתרון x שנקבל יקיים:

נתבונן בדוגמאות:

א. תהי $f(x) = 3x + 1$. כדי למצוא את f^{-1} , נפתור את המשוואה:

$$3x + 1 = y$$

$$\Rightarrow 3x = y - 1 \quad \text{נחסר 1 משני האגפים:}$$

$$\Rightarrow x = \frac{y-1}{3} \quad \text{נחלק ב-3:}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{3} \quad \text{לכן:}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{לבסוף, נחליף את שם המשתנה:}$$

$$f^{-1}(10) = \frac{10-1}{3} = 3, \quad \text{לדוגמה, } f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10, \text{ ובהתאם לכך,}$$

ב. תהי $f(x) = x^2, f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

f עולה בקטע $[0, \infty)$, ולכן חח"ע.

תמונת f היא הקטע $[0, \infty)$. כדי למצוא את f^{-1} , נניח ש- $y \in \text{Im } f$, כלומר $y \geq 0$, ונתבונן במשוואה:

$$x^2 = y$$

נפתור משוואה זו (בהנחה ש- x שייך לתחום ההגדרה של f , כלומר $x \geq 0$):

$$\Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \text{לכן}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{ובהחלפת שם משתנה}$$

קיבלנו שפונקציית השורש היא הפונקציה ההפוכה לפונקציית ההעלאה בריבוע עבור מספרים אי-שליליים. ממצא זה מתיישב עם כך שפעולת הוצאת השורש היא פעולה הפוכה להעלאה בריבוע.

שאלה 35

מצאו את הפונקציות ההפוכות לפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x/2$

ב. $f(x) = x^2 + 1, f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

ג. $f(x) = x^2, f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$

ד. $f(x) = x + 4, f: [1, 3] \rightarrow [5, 7]$

ה. $f(x) = x^2 + x, f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

גרף הפונקציה ההפוכה

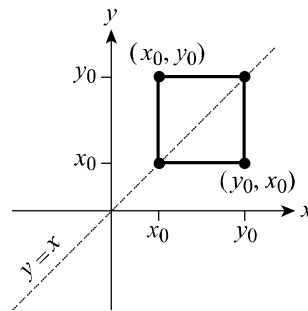
כדי להבין את הקשר בין הגרף של פונקציה ממשית f לבין גרף הפונקציה ההפוכה f^{-1} , נתבונן בשקילות:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

במונחי גרף הפונקציה, ניתן להציג שקילות זו כך:

(x_0, y_0) היא נקודה $\Leftrightarrow (y_0, x_0)$ היא נקודה
על גרף הפונקציה f^{-1} על גרף הפונקציה f

כעת נתבונן במערכת הצירים הקרטזית בנקודות (x_0, y_0) , (y_0, x_0) , ובישר $y = x$:



◁ על זוויות נלמד בשיעור 8.

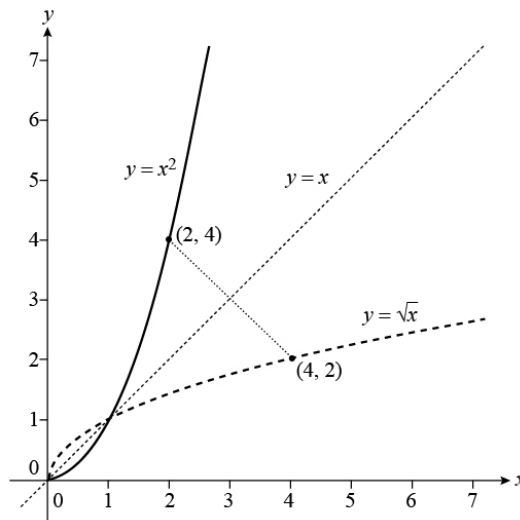
הישר $y = x$ יוצר זווית של 45° עם ציר ה- x ועם ציר ה- y . ארבע הנקודות המסומנות באיור הן קודקודיו של ריבוע. מכאן (ומשיקולים גיאומטריים שנכיר בשיעור 8) נובע שהנקודה (y_0, x_0) היא בבואת־ראי של הנקודה (x_0, y_0) ביחס לישר $y = x$.

מהבחינה זו נובע הכלל הבא:

גרף הפונקציה ההפוכה לפונקציה נתונה הוא שיקוף של גרף הפונקציה

הנתונה ביחס לישר $y = x$.

לדוגמה, ראינו שהפונקציה ההפוכה לפונקציה $f(x) = x^2$ בקטע $[0, \infty)$ היא $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$. נשרטט את הגרפים של שתי הפונקציות יחדיו:



שאלה 36

עבור כל פונקציה f , שרטטו את הגרפים של f ו- f^{-1} יחדיו, ודאו שכלל השיקוף מתקיים:

א. $f(x) = 2x + 1, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

ב. $f(x) = x + 1, f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

ג. $f(x) = -x^2, f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

התשובה בעמוד 255

הזזה, מתיחה ושיקוף במקביל לצירים

בסעיף זה נלמד על פעולות פשוטות בפונקציות המיתרגמות לשינוי גיאומטרי של גרף הפונקציה.

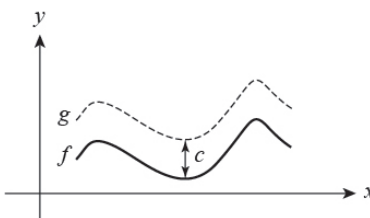
א. הוספת קבוע לפונקציה

בהינתן פונקציה ממשיית f ומספר קבוע, נתבונן בפונקציה:

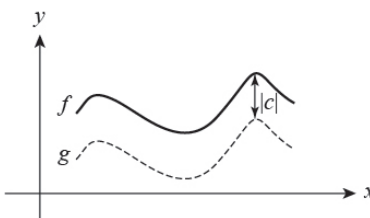
$$g(x) = f(x) + c$$

גרף הפונקציה g מתקבל מגרף הפונקציה f על ידי הוספת הקבוע c לשיעורי- y של נקודותיו.

לכן, אם $c > 0$, גרף הפונקציה g הוא הזזה כלפי מעלה של גרף f בשיעור של c יחידות:



בדומה, אם $c < 0$, הגרף המתקבל הוא הזזה כלפי מטה של גרף f בשיעור של $|c|$ יחידות:



ב. הכפלת פונקציה בקבוע חיובי

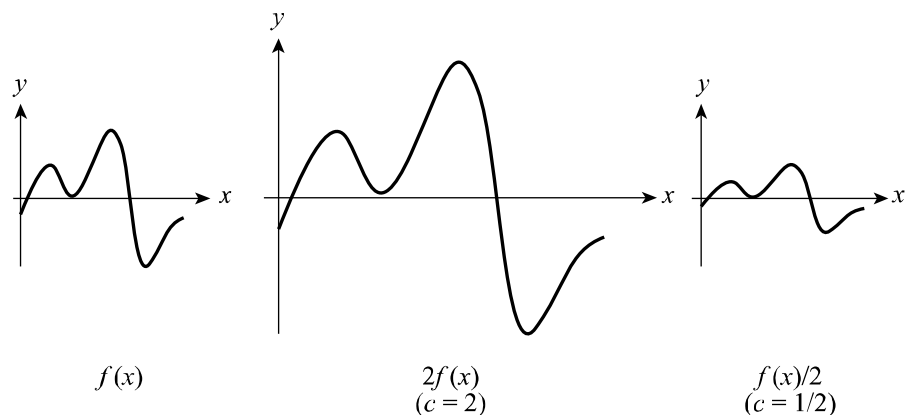
יהי $c > 0$, ונתבונן בפונקציה הבאה:

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

הגרף של g מתקבל מהגרף של f על ידי הכפלת שיעורי- y של נקודות הגרף ב- c . במקרה ש- $c > 1$, משמעות פעולה זו היא מתיחת גרף הפונקציה ביחס של $1:c$ במקביל לציר ה- y .

במקרה ש- $0 < c < 1$, המשמעות היא כיווץ של גרף הפונקציה ביחס של $1:c$ במקביל לציר ה- y .

לדוגמה:

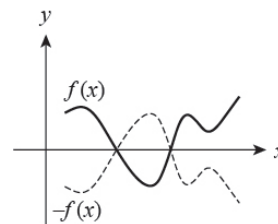


ג. הכפלת פונקציה בקבוע שלילי

נתבונן בפונקציה:

$$g(x) = -f(x) = (-1) \cdot f(x)$$

ערך הפונקציה g בכל נקודה הוא המספר הנגדי לערך של f באותה נקודה. לכן הגרף של g מתקבל משיקוף גרף הפונקציה f ביחס לציר ה- x .



כעת, בהינתן הפונקציה

$$g(x) = c \cdot f(x)$$

כש- c מספר שלילי כלשהו, נוכל להציג

$$g(x) = (-c) \cdot (-1) \cdot f(x) = |c| \cdot (-1) \cdot f(x)$$

לכן ניתן לקבל את הגרף של g בשני שלבים: שיקוף הגרף של f , ומתיחת הגרף המתקבל בהתאם לערכו המוחלט של c .

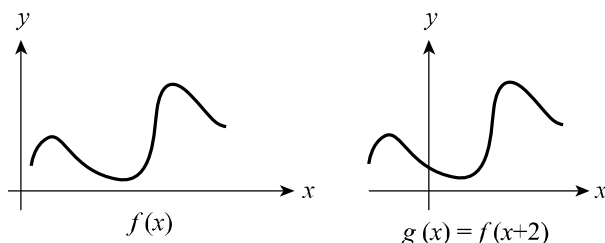
ד. הוספת קבוע למשתנה הפונקציה

נתבונן בפונקציה:

$$g(x) = f(x + c)$$

הגרף של g מתקבל על ידי הזזת הגרף של f במקביל לציר ה- x , בכיוון **מנוגד** לסימנו של c .

לדוגמה, הגרף של $g(x) = f(x + 2)$ מתקבל על ידי הזזת הגרף של f שתי יחידות **שמאלה**:



ההסבר לתופעה זו הוא שאם נקודה על גרף הפונקציה f , אז $y_0 = f(x_0)$, לכן $y_0 = f(x_0 - 2 + 2) = g(x_0 - 2)$ ומכאן שהנקודה $(x_0 - 2, y_0)$ היא נקודה על גרף הפונקציה g .

ה. הכפלת משתנה הפונקציה בקבוע

נתבונן בפונקציה:

$$g(x) = f(cx)$$

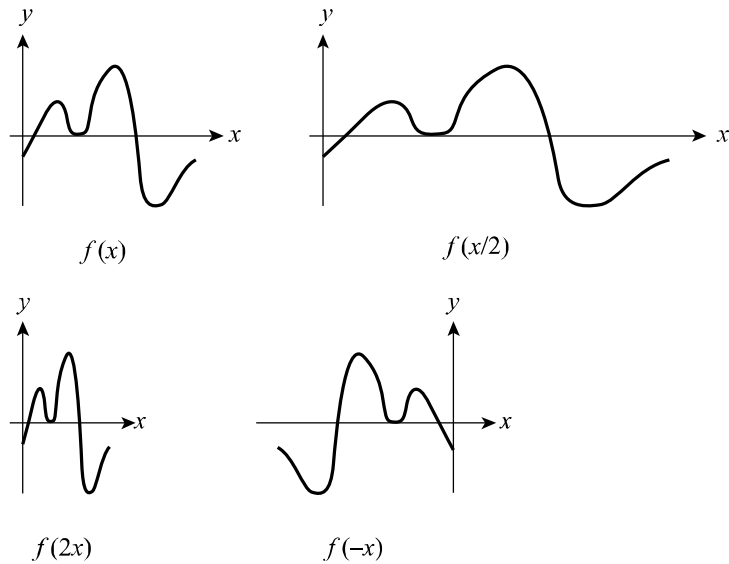
עבור $c \neq 0$, קבוע כלשהו.

הגרף של g מתקבל מהגרף של f בדרך הבאה:

- אם $c > 1$, יש לכווץ את הגרף של f במקביל לציר ה- x ביחס של $1 : c$.
- אם $0 < c < 1$, יש למתוח את הגרף של f במקביל לציר ה- x ביחס של $1 : c$.
- אם $c = -1$ (כלומר $g(x) = f(-x)$), יש לשקף את גרף הפונקציה f ביחס לציר ה- y .
- אם $c < 0$, יש לבצע שילוב של שיקוף ומתיחה/כיווץ לפי השוויון:

$$g(x) = f((-c) \cdot (-x))$$

להבהרה נתבונן בדוגמאות הבאות:



לסיכום, ראינו שהוספה של קבוע לפונקציה או למשתנה הפונקציה מביאה להזזה של גרף הפונקציה במקביל לצירים.

כמו כן, ראינו שהכפלה של פונקציה או משתנה הפונקציה בקבוע שאינו 0 מביאה למתיחה/כיווץ של גרף הפונקציה במקביל לצירים, ו/או שיקוף של גרף הפונקציה ביחס אליהם.

בתחילת שיעור זה ביטאנו את הפונקציה הריבועית $f(x) = ax^2 + bx + c$ כך:

$$f(x) = a \cdot \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$

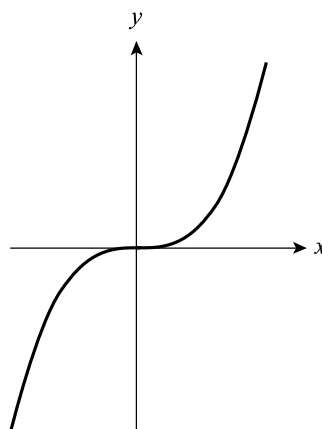
כעת נוכל לנמק מדוע גרף הפונקציה f דומה בצורתו לגרף הפונקציה $g(x) = x^2$:

- גרף הפונקציה $f_1(x) = (x + b/(2a))^2$ מתקבל מהגרף של $g(x) = x^2$ על ידי הזזה במקביל לציר ה- x .
- גרף הפונקציה $f_2(x) = a \cdot (x + b/(2a))^2$ מתקבל מהגרף של f_1 על ידי מתיחה/כיווץ ו/או שיקוף, בהתאם לערכו של a .
- גרף הפונקציה $f(x) = a \cdot (x + b/(2a))^2 - D/(4a)$ מתקבל מהגרף של f_2 על ידי הזזה במקביל לציר ה- y .

לכן גרף הפונקציה הריבועית f הוא פרבולה.

שאלה 37

נתון גרף הפונקציה $f(x) = x^3$:



בעזרת גרף זה, שרטטו את הגרפים של הפונקציות הבאות:

א. $g(x) = x^3 + 1$

ב. $g(x) = (x - 1)^3$

ג. $g(x) = -x^3/2$

התשובה בעמוד 257

סיכום שיעור 6

בשיעור זה הכרנו את מושג הפונקציה וראינו דוגמאות רבות לפונקציות ממשיות. למדנו איך לאפיין פונקציות על פי תכונות שונות וכיצד לבצע פעולות בין פונקציות. למדנו גם כיצד לייצג פונקציות באופן גרפי לפי שיטתו של דקארט. כך, לפתע, הביטויים האלגבריים שהכרנו בעבר קמו לתחייה ולבשו צורה מוחשית.

ההמחשה הוויזואלית תורמת, בדרך כלל, להבנת מהות הפונקציות שלפנינו ומאפשרת חשיבה אינטואיטיבית. המוח האנושי רגיל לעבד אינפורמציה חזותית במהירות רבה ולגבש תובנות לגביה.

החשיבה האינטואיטיבית חשובה מאוד במתמטיקה, כי היא זו המאפשרת ראייה רחבה של בעיות ופריצת נתיבים אל פתרונן. יחד עם זאת, חשוב לשלב איתה חשיבה פורמלית יותר, שתעגן את הרעיונות האינטואיטיביים במסגרת של טיעון מתמטי. דבר זה יהיה חשוב במיוחד בקורסים האקדמיים שתלמדו בעתיד. גם בקורס הנוכחי חשוב להוכיח ולהבין לעומק. יחד עם זאת, במקרים מסוימים נוכל להסתפק, לעת עתה, בהסקת מסקנות ישירה מגרף הפונקציה. לדוגמה, בהינתן הגרף של פונקציה ריבועית, נסיק ממנו את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה מבלי להוכיח זאת בצורה פורמלית ומלאה.

בהמשך הקורס נכיר עוד דוגמאות מעניינות לפונקציות, וגם נלמד על דרכים מתוחכמות לחקירת תכונותיהן.

שאלות להערכה עצמית

שאלה 38

לגבי כל אחת מהפונקציות מצאו את נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הצירים ואת תחומי העלייה והירידה, ושרטטו את גרף הפונקציה:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = |x - 5| & \text{ב. } f(x) = \sqrt{5 - x} \\ \text{ג. } f(x) = 2x^2 - 7x + 3 & \text{ד. } f(x) = |x^2 - x| \end{array}$$

התשובה בעמוד 258

שאלה 39

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}, g(x) = \sqrt{x}$$

תהינה:

א. חשבו את פונקציית ההרכבה $f \circ g$.

ב. מצאו את תמונת הפונקציה f .

ג. מצאו את f^{-1} .

התשובה בעמוד 261

שאלה 40

תהי $f(x) = \lfloor x \rfloor$. מצאו קבוצה אינסופית A כך ש- $f|_A$ חח"ע.

התשובה בעמוד 262

שאלה 41

תהי f פונקציה ממשית.

הוכיחו שאם f עולה אז f^{-1} עולה, ואם f יורדת אז f^{-1} יורדת.

התשובה בעמוד 263

שאלה 42

$$f(x) = \prod_{i=1}^{100} (x - i)$$

נתבונן בפונקציה:

מצאו את נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם הצירים.

התשובה בעמוד 263

שאלה 43

הוכיחו שאם f ו- g הן פונקציות לינאריות, אז $f + g$ ו- $f \circ g$ הן פונקציות לינאריות. מה ניתן לאמר על השיפועים של פונקציות אלה?

התשובה בעמוד 263

שיעור 7 חזקות ולוגריתמים

שיעור זה יוקדש להבנה מעמיקה של פעולת החזקה ושל פעולות הקשורות אליה.

בעבר הגדרנו חזקה טבעית של מספר ממשי כך:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ פעמים}} = \prod_{i=1}^n a$$

$a < a$ מספר ממשי; n מספר טבעי

בהגדרה זו, a נקרא **בסיס החזקה**, ו- n נקרא **מעריך החזקה**.

$$a^0 = 1$$

בנוסף הגדרנו:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ועבור $a \neq 0$, הגדרנו

באופן זה הגדרנו **חזקות שלמות** של מספרים ממשיים.

עתה נדון בהרחבת ההגדרה של פעולת החזקה לכל מצב שבו הבסיס חיובי והמעריך הוא מספר ממשי. בהגדרה זו נקפיד על כך שהחוקים שהכרנו בעבר – חוקי החזקות – ימשיכו להתקיים עבור תחום הערכים החדש.

חזקות רציונליות

נניח ש- a הוא מספר חיובי כלשהו. אנו יודעים, כאמור, להגדיר את החזקות

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^1 &= a \\ a^2 &= a \cdot a \\ a^3 &= a \cdot a \cdot a \end{aligned}$$

אך מהי החזקה $a^{1/2}$? ומהי $a^{3/7}$?

כדי להגדיר חזקה רציונלית של מספר חיובי, נתחיל מהמקרה שבו מונה המעריך הוא 1, כלומר נגדיר את החזקה $a^{1/n}$.

$$(a^{1/n})^n = a^{(1/n) \cdot n} = a^1 = a$$

מספר זה צריך לקיים, לפי חוקי החזקות:

$$\boxed{a^{1/n} = \sqrt[n]{a}}$$

לכן נגדיר:

$$a^{1/3} = \sqrt[3]{a} \quad \text{ו-} \quad a^{1/2} = \sqrt{a}$$

לדוגמה,

כעת נגדיר חזקה רציונלית כללית: a^q , כאשר q הוא מספר רציונלי. נסמן $q = m/n$, כש- m מספר שלם ו- n מספר טבעי.

לפי חוקי החזקות, מתחייבת ההגדרה הבאה:

$$a^q = a^{m/n} = a^{(1/n) \cdot m} = (a^{1/n})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$a^{m/n} = (\sqrt[n]{a})^m$$

כלומר:

לדוגמה, לפי הגדרה זו:

$$27^{2/3} = (\sqrt[3]{27})^2 = 3^2 = 9$$

$$7^{1.5} = 7^{3/2} = (\sqrt{7})^3 = (\sqrt{7})^2 \cdot \sqrt{7} = 7\sqrt{7}$$

שאלה 1

חשבו:

ג. $(1/8)^{1/3}$

ב. $32^{2/5}$

א. $16^{1/2}$

ה. $8^{2\frac{1}{2}}$

ד. $9^{-1\frac{1}{2}}$

התשובה בעמוד 265

הערה: בהינתן מספר רציונלי q , יש דרכים שונות לבטא אותו בצורה $q = m/n$ (עם m שלם ו- n טבעי). לדוגמה, $1/2 = 2/4 = 3/6$. ניתן להוכיח שההגדרה לחזקה a^q שרשומה לעיל אינה תלויה בבחירת הייצוג של q כשבר (ראו שאלה 27 בעמוד 131). לכן הגדרה זו היא תקינה.

חזקות ממשיות

נעבור לדון בהגדרה הכללית של החזקה a^x עבור $a > 0$ ממשי ו- x מספר ממשי כלשהו. ההגדרה המדויקת של פעולה זו חורגת ממסגרת הקורס הזה, אך נסביר את הרעיון שעומד מאחוריה.

אם המעריך x הוא מספר רציונלי, אז עבודתנו הושלמה, שכן כבר הגדרנו חזקות רציונליות. במקרה ש- x אינו רציונלי, נוכל להתקרב אליו על ידי מספרים רציונליים. לדוגמה, אם $x = \sqrt{2}$, נפתח את x כשבר עשרוני אינסופי: $x = 1.4142135\dots$, ונתבונן בשברים העשרוניים הסופיים הבנויים מהספרות הראשונות של x :

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, \dots$$

בדרך זו מתקבלת סדרה אינסופית. כל אחד מהמספרים שבסדרה זו הוא רציונלי:

$$1.4 = \frac{14}{10}, 1.41 = \frac{141}{100}, 1.414 = \frac{1414}{1000}, \dots$$

כפי שלמדנו בשיעור הראשון, מספרים אלה הולכים ומתקרבים אל המספר x . כעת נתבונן בסדרת החזקות הבאה:

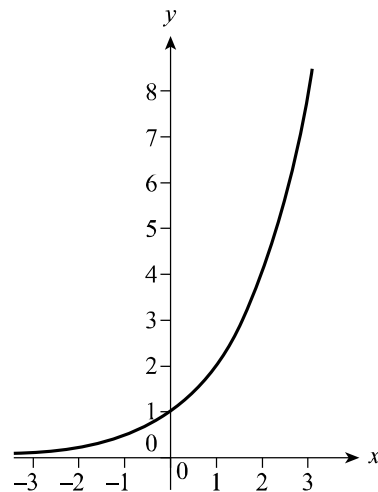
$$a^1, a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, \dots$$

כל אחת מהחזקות שבסדרה זו מוגדרת היטב, שכן כבר הגדרנו מהי חזקה רציונלית של מספר חיובי. ניתן להוכיח שהערכים בסדרה זו הולכים ומתקרבים אל ערך גבולי מסוים, והחזקה a^x מוגדרת כערך זה.

באופן זה, עבור כל בחירה של a , מתקבלת פונקציית החזקה

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x$$

לדוגמה, עבור $a = 2$ נקבל את הפונקציה $f(x) = 2^x$. גרף הפונקציה נראה כך:



בגרף זה תוכלו לזהות את הערכים בנקודות השלמות, לדוגמה:

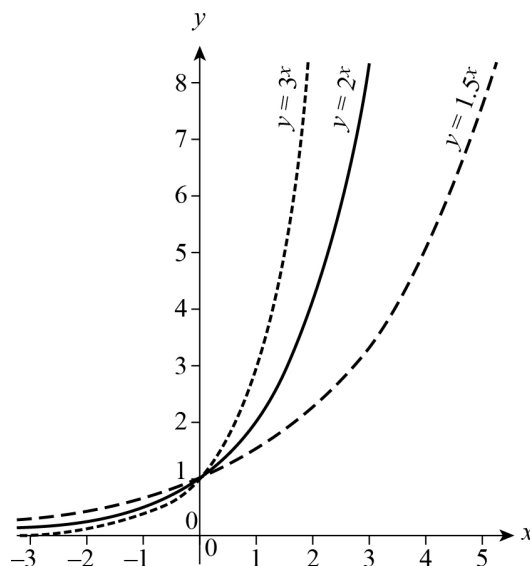
$$f(0) = 2^0 = 1, f(1) = 2^1 = 2, f(2) = 2^2 = 4, f(3) = 2^3 = 8$$

$$f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}, f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}, f(-3) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1/2} = \sqrt{2} \approx 1.41 \quad \text{כמו כן:}$$

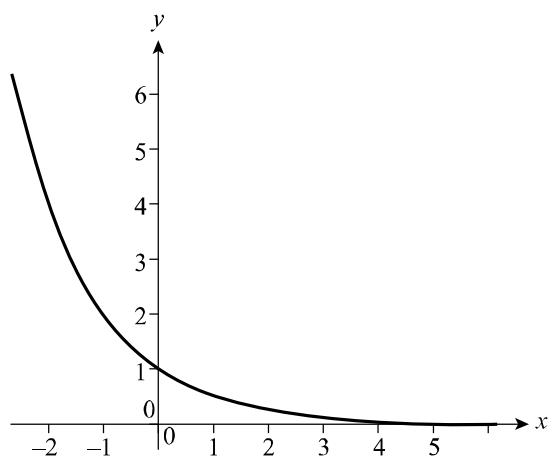
אם נתבונן בערכי y עבור ערכי x חיוביים שהולכים וגדלים, נגלה כי אלה הולכים וגדלים במהירות רבה. לדוגמה, עבור $x = 64$, ערך הפונקציה הוא $f(x) = 2^{64}$, מספר עצום בגודלו. המחשה לכך ראינו ב"אגדה על ממצאי השחמט" בשיעור 5.

גרף דומה יתקבל עבור כל בחירה של $a > 1$. ככל ש- a גדול יותר, כך יטפס הגרף במהירות רבה יותר. בגרף הבא מוצגות בריזמנית הפונקציות 1.5^x , 2^x , 3^x :

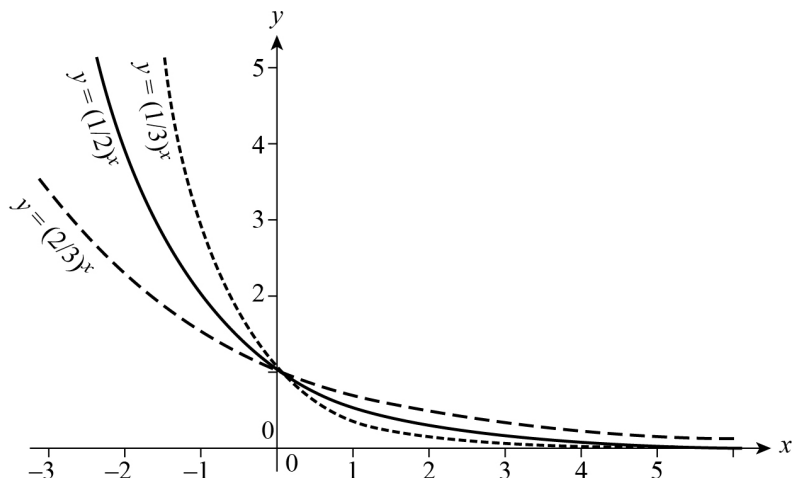


עבור $0 < a < 1$ מתקבלת תמונה הפוכה: ערכי y הולכים ודועכים ל-0 ככל ש- x גדל, אך מטפסים מעלה במהירות רבה עבור ערכי x שליליים.

לדוגמה, הנה גרף הפונקציה $f(x) = (1/2)^x$:



והנה הגרפים של הפונקציות $(2/3)^x$, $(1/2)^x$, $(1/3)^x$ יחדיו:



פונקציות מעריכיות

נקרא בשם **פונקציה מעריכית** לכל פונקציה מהצורה

$$f(x) = ca^x$$

בהגדרה זו a ו- c הם קבועים חיוביים.

פונקציה מעריכית יכולה להיות אפוא פונקציית חזקה $f(x) = a^x$, או מכפלה שלה בקבוע חיובי. לכן הגרף של פונקציה מעריכית זהה לגרף של פונקציית חזקה, או מתקבל ממנה על ידי מתיחה או כיווץ במקביל לציר ה- y .

במקרה ש- $a > 1$ נאמר שהפונקציה $f(x) = ca^x$ מייצגת **גידול מעריכי**.

במקרה ש- $0 < a < 1$ נאמר שהפונקציה $f(x) = ca^x$ מייצגת **דעיכה מעריכית**.

התופעות של גידול ודעיכה מעריכיים נפוצות בעולם הממשי. נכיר כמה דוגמאות.

דוגמה ראשונה: ריבית בנקאית

אדם מפקיד סכום התחלתי של M שקלים בתוכנית חיסכון הנושאת ריבית שנתית בשיעור r . שיעור זה מבוטא בדרך כלל באחוזים. לדוגמה, $r = 0.1$ משמעותו ריבית של 10%.

כפי שניתחנו בעבר, אם נגדיר $q = 1 + r$ ונתבונן בסכום החיסכון לאחר שנה, שנתיים, שלוש, וכן הלאה, נקבל סדרה הנדסית שמנתה היא q :

$$a_n = M \cdot q^n = \text{סכום החיסכון לאחר } n \text{ שנים}$$

במסגרת שיפור השירות ללקוח, הבנק מאפשר לפדות את הכסף בכל עת, תוך שמירה על ריבית קבועה. משמעות הנחה זו היא ששיעור הריבית שצובר הסכום במשך תקופה מסוימת תלוי רק באורך התקופה ולא בעיתויה.

כיצד יוכל הבנק לחשב את הסכום שעומד לרשות החוסך בתום חודש מתקופת החיסכון? בתום חודשיים? בתום 53 ימים?

נתחיל מהשאלה הראשונה. נצא מנקודת ההנחה שחודש הוא בדיוק $1/12$ של שנה. נסמן את הריבית עבור תקופה של חודש ב- r_m , ונסמן $q_m = 1 + r_m$. בכל חודש סכום החיסכון מוכפל פי q_m , ולכן בשנה סכום החיסכון מוכפל פי q_m^{12} .

◁ האות m מייצגת את המילה month = חודש.

ידוע לנו גם שסכום החיסכון מוכפל בשנה פי q . מכאן מתקבל השוויון:

$$q_m^{12} = q$$

$$\Rightarrow q_m = \sqrt[12]{q}$$

◁ לפי הגדרת החזקה הרציונלית

$$M \cdot q_m = M \cdot \sqrt[12]{q} = Mq^{1/12}$$

סכום החיסכון בתום חודש אחד יהיה

$$M \cdot q_m^2 = M \cdot \left(\sqrt[12]{q}\right)^2 = Mq^{2/12} = Mq^{1/6}$$

ובתום חודשיים:

באופן דומה, אם נסמן ב- r_d את הריבית עבור יום אחד, ו- $q_d = 1 + r_d$, נקבל שסכום החיסכון מוכפל בכל יום ב- q_d , ומכאן (בהנחה שהשנה מחולקת ל-365 ימים בדיוק), בשנה אחת הסכום מוכפל פי $q_d^{365} = q$. לכן $q_d^{365} = q$, ומכאן $q_d = \sqrt[365]{q}$. לכן סכום החיסכון לאחר 53 ימים יהיה:

◁ האות d מייצגת את המילה day = יום.

$$M \cdot q_d^{53} = M \cdot \left(\sqrt[365]{q}\right)^{53} = Mq^{53/365}$$

נסכם את ממצאינו:

$$Mq^{1/12}$$

לאחר חודש אחד, כלומר $1/12$ של שנה, סכום החיסכון יהיה:

$$Mq^{1/6}$$

לאחר חודשיים, כלומר $1/6$ של שנה, סכום החיסכון יהיה

$$Mq^{53/365}$$

לאחר 53 ימים, כלומר $53/365$ של שנה, סכום החיסכון יהיה

אם נסמן ב- $f(t)$ את סכום החיסכון לאחר t שנים, נקבל שבכל המקרים לעיל מתקיים

$$(1) \quad f(t) = Mq^t$$

אולם אין דבר מיוחד בפרקי הזמן שבחרנו, פרט להיותם מספרים רציונליים חיוביים. הנוסחה (1) מתקיימת אפוא לכל t שכזה, ובאופן כללי, לכל $t \geq 0$ ממשי.

המסקנה מדיון זה היא שסכום החיסכון גדל **באופן מעריכי** עם הזמן, בהתאם לנוסחה (1).

דוגמה שנייה: גידול של אוכלוסיית בקטריות

במחקרי מעבדה נהוג להחזיק אוכלוסייה של בקטריות בצלוחית הנקראת צלוחית פטרי. בהנחה שהבקטריות נשמרות בתנאים קבועים (מבחינת מזון, אוויר, טמפרטורה וכדומה), קצב ההתרבות שלהן יהיה קבוע: בפרקי זמן שווים, אחוז הגידול באוכלוסייה יהיה זהה.

נתונה צלוחית ובה 1000 בקטריות. האוכלוסייה מכפילה את עצמה בכל 20 דקות. כמה בקטריות יהיו בצלוחית כעבור 65 דקות?

פתרון: בשעה יש שלושה פרקי זמן של 20 דקות, ולכן בשעה אחת מוכפלת אוכלוסיית הבקטריות פי $2 \times 2 \times 2 = 8$. אם נסמן את קצב ההתרבות של אוכלוסיית הבקטריות בדקה אחת ב- q , נקבל שבשעה אחת שהיא 60 דקות, יוכפל גודל האוכלוסייה בגורם q^{60} . לכן, $q^{60} = 8$, ומכאן $q = \sqrt[60]{8}$. במהלך 65 דקות גודל האוכלוסייה יוכפל בגורם q^{65} , ולכן כמות הבקטריות תהיה

$$1000 \cdot q^{65} = 1000 \cdot \left(\sqrt[60]{8}\right)^{65} = 1000 \cdot 8^{65/60} \approx 9514$$

עיגלנו את התשובה לשלם הקרוב ביותר, שכן מספר הבקטריות הוא שלם. נזכור שאנו מנתחים תהליך טבעי, שיש בו מידה מסוימת של אקראיות. לכן החישוב הוא מקורב בלבד.

ראינו כי לאחר 65 דקות, שהן 65/60 שעות, גודל האוכלוסייה המקורב הוא $1000 \cdot 8^{65/60}$. באופן כללי, גודל האוכלוסייה המקורב לאחר t שעות הוא $f(t) = 1000 \cdot 8^t$. אוכלוסיית הבקטריות גדלה, אפוא, באופן מעריכי עם הזמן.

דוגמה שלישית: שתיית קפה

כוס קטנה של קפה הפוך יש כ-60 מיליגרם (מ"ג) של קפאין. לאחר שתיית הקפה, הקפאין נכנס למחזור הדם, ומתנקה ממנו בקצב קבוע: בפרקי זמן שווים חלה דעיכה שווה (באחוזים) של כמות הקפאין בדם. לאחר כ-5 שעות יורדת כמות הקפאין בדם בכמחצית.

מה תהיה כמות הקפאין בדם 3 שעות לאחר השתייה?

נסמן את שיעור ההפחתה של כמות הקפאין בשעה אחת ב- q , כלומר: אם ברגע מסוים יש A מיליגרם של קפאין במחזור הדם, כעבור שעה יישאר Aq מיליגרם של קפאין בדם. לאחר שעתיים הכמות שתישאר היא Aq^2 , ולאחר חמש שעות הכמות שתישאר היא Aq^5 . לפי הנתון, מתקבלת המשוואה $Aq^5 = A/2$, ממנה נובע ש- $q^5 = 1/2$, ולכן $q = \sqrt[5]{1/2}$.

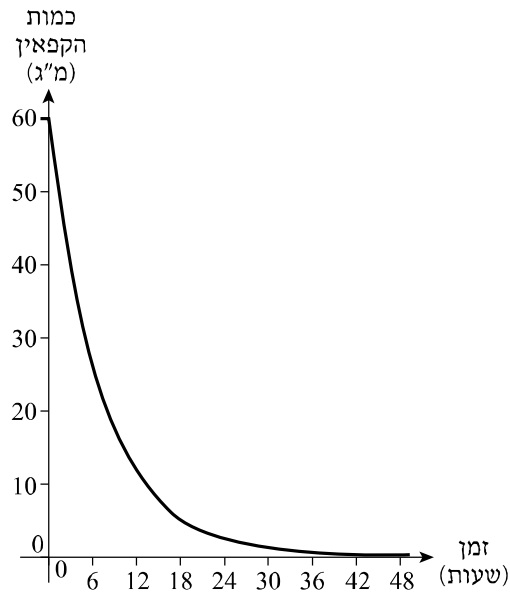
לאחר 3 שעות מרגע שתיית הקפה, הכמות שתישאר היא $60 \cdot q^3 = 60 \left(\sqrt[5]{1/2}\right)^3 \approx 39.59$ מיליגרם.

בדומה למקרים הקודמים, נוכל לראות כי כמות הקפאין בזמן $t \geq 0$ **כלשהו** היא

$$f(t) = 60 \cdot \left(\sqrt[5]{1/2}\right)^t \approx 60 \cdot (0.87)^t$$

במקרה זה מדובר ב**דעיכה מעריכית** של רמת הקפאין בדם.

נציג את גרף הפונקציה:



כפי שניתן לראות, החל משלב מסוים הכמות תהיה כה קטנה עד שלא יהיה ניתן לאתרה בדם. הפונקציה שבגרף היא רק קירוב של המציאות. באופן מעשי, הפונקציה תתאפס החל משלב מסוים (בהנחה שלא נשתה כוס קפה נוספת).

משלוש הדוגמאות שראינו ניתן להסיק את הכלל הבא:

אם כמות מסוימת גדלה או קטנה ביחס זהה בפרקי זמן שווים, אז כמות זו היא פונקציה מעריכית של הזמן.

שאלה 2

אם נפקיד 1000 שקלים בתוכנית הנושאת ריבית שנתית של 5% וניתנת לפדיון בכל עת, כמה נוכל לפדות: (א) כעבור שישה חודשים? (ב) כעבור שנה ושלושה חודשים?

התשובה בעמוד 265

שאלה 3

אדם הפקיד 1000 שקלים בתוכנית חיסכון נושאת ריבית קבועה. כעבור 9 שנים גילה כי לזכותו 1500 שקלים. כמה כסף יקבל אם יחכה 6 חודשים נוספים עד לפדיון?

התשובה בעמוד 265

שאלה 4

במפקד אוכלוסייה התברר שמספר התושבים של מדינה מסוימת הוא 1,000,000. לאחר 3 שנים נערך מפקד נוסף, והתגלה כי מספר התושבים הוא 1,020,000. בהנחה שקצב ריבוי האוכלוסייה הוא קבוע:

א. מצאו נוסחה המתארת את גודל האוכלוסייה כפונקציה של הזמן.

ב. מה צפוי להיות גודל האוכלוסייה 10 שנים לאחר המפקד השני?

התשובה בעמוד 266

חוקי החזקות הממשיות

לאחר שראינו דוגמאות אחדות לשימושיות של מושג החזקה הממשית, נפנה ללמוד את תכונותיה. נתחיל בהצגת החוקים הבסיסיים של החזקות הממשיות, אותם לא נוכיח בקורס זה, והמסקנות המיידות הנובעות מהם.

א. **תחום הגדרת החזקות הממשיות:** לכל $a > 0$ ולכל $b \in \mathbb{R}$ מוגדרת החזקה a^b .

ב. **תאימות להגדרות קודמות:** אם b מספר שלם, אז החזקה a^b זהה לחזקה שהוגדרה בעבר. בפרט, מתקיים:

$$a^0 = 1, a^1 = a$$

ראו תזכורת להגדרת החזקות השלמות בתחילת שיעור זה (עמוד 103).

ג. **חזקה של 1:** לכל $b \in \mathbb{R}$, $1^b = 1$

ד. **חיוביות החזקות הממשיות:**

לכל $a > 0$ ולכל $b \in \mathbb{R}$, $a^b > 0$

ה. **חוק חיבור המעריכים:**

לכל $a > 0$ ולכל $b, c \in \mathbb{R}$, $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

ו. **חוק החזקה של חזקה:**

לכל $a > 0$ ולכל $b, c \in \mathbb{R}$, $(a^b)^c = a^{bc}$

ז. **חוק פילוג החזקה מעל הכפל:**

לכל $a > 0$, $b > 0$ ולכל $c \in \mathbb{R}$, $(ab)^c = a^c b^c$

מתכונות אלה נובעות התכונות הבאות:

ח. **חוק חיסור המעריכים:**

לכל $a > 0$ ולכל $b, c \in \mathbb{R}$, $a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$

ט. **חוק פילוג החזקה מעל החילוק:**

לכל $a > 0$, $b > 0$ ולכל $c \in \mathbb{R}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$

י. **חוק החזקה במעריך הנגדי:**

לכל $a > 0$ ולכל $b \in \mathbb{R}$, $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

הערות:

א. כפי שבוודאי שמתם לב, הזהויות הכלולות בחוקים אלה הן חוקי החזקות שכבר הכרנו בעבר לגבי חזקות שלמות. החידוש היחיד לגביהן הוא התקיימותן בתחום הערכים החדש של החזקות הממשיות.

ב. כבר ראינו בעבר (שיעור 2) איך החוקים ח,ט נובעים מהחוקים היסודיים, ולכן לא נחזור על הוכחה זו. לגבי חוק י, הוא נובע מיידית מחוק חיסור המעריכים בהצבה $b = 0$.

ג. מהזהות $a^{-b} = 1/a^b$ נובע שגרף הפונקציה $f(x) = (1/a)^x$ הוא שיקוף ביחס לציר ה־y של גרף הפונקציה $g(x) = a^x$. זאת מפני שמתקיים:

$$f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1^x}{a^x} = \frac{1}{a^x} = a^{-x} = g(-x)$$

למשל, גרף הפונקציה $f(x) = (1/2)^x$ הוא שיקוף ביחס לציר ה־y של גרף הפונקציה $g(x) = 2^x$, כפי שניתן לראות בגרפים שבעמודים 105 ו־106.

בשאלות הבאות נתרגל את השימוש בחוקים החדשים.

שאלה 5

פשטו את הביטויים הבאים:

התשובה בעמוד 266

$$\text{א. } \frac{2^{2x+1}}{8^x} \quad \text{ב. } \frac{(\sqrt{2})^{4x-1}}{2^x} \quad \text{ג. } (x^2 y^3)^{1/3} \quad \text{ד. } \frac{10^x 2^{-x}}{(\sqrt{5})^{2x}}$$

שאלה 6

יהי $a > 0$ ויהיו $x_1, x_2, \dots, x_n$ מספרים ממשיים. הוכיחו את הזהות הבאה:

התשובה בעמוד 267

$$a^{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)} = \prod_{i=1}^n a^{x_i}$$

חוקי השורשים מסדר כללי

הגדרת החזקות הרציונליות התבססה על הזהות הבאה:

$$(1) \quad a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \quad \text{לכל } a > 0 \text{ ו- } n \text{ טבעי,}$$

נזכיר ש־ $b = \sqrt[n]{a}$ (השורש ה־n־י, או השורש מסדר n, של a) הוא המספר החיובי היחיד המקיים $b^n = a$.

מהזהות (1), בשילוב עם חוקי החזקות, נסיק זהויות לגבי שורשים מסדר n :

א. **כפליות השורש מסדר n** :

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \quad \text{לכל } a > 0, b > 0 \text{ ולכל } n \text{ טבעי,}$$

הוכחה:

$$\sqrt[n]{ab} = (ab)^{1/n} \quad \text{לפי הגדרת החזקה הרציונלית,}$$

$$= a^{1/n} b^{1/n} \quad \text{לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל,}$$

$$\square \quad = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \quad \text{שוב לפי הגדרת החזקה הרציונלית,}$$

ב. **שורש של מנה:**

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{לכל } a > 0, b > 0 \text{ ולכל } n \text{ טבעי,}$$

תכונה זו תוכח בשאלה 7 להלן.

ג. **הרכבת שורשים:**

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nm]{a} \quad \text{לכל } a > 0 \text{ ולכל } m, n \text{ טבעיים,}$$

הוכחה:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = (a^{1/n})^{1/m} \quad \text{לפי הגדרת החזקה הרציונלית,}$$

$$= a^{(1/n) \cdot (1/m)} \quad \text{לפי חוק החזקה של חזקה}$$

$$= a^{1/nm}$$

$$\square \quad = \sqrt[nm]{a} \quad \text{שוב לפי הגדרת החזקה הרציונלית,}$$

נדגים את השימוש בתכונות אלה בפישוט של ביטויים מספריים:

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{8} = 2\sqrt[3]{3} \quad \text{לפי תכונה א,}$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \quad \text{לפי תכונה ב,}$$

$$\sqrt{\sqrt{7}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{7}} = 2\sqrt[2]{7} = \sqrt[4]{7} \quad \text{לפי תכונה ג,}$$

שאלה 7

הוכיחו את תכונה ב: $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$.

שאלה 8

פשטו את הביטויים המספריים הבאים:

א. $\sqrt[3]{81} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt[6]{3}$ ב. $\sqrt{2}/\sqrt[3]{2}$
 ג. $\sqrt[3]{0.008}$ ד. $\left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{2}}\right)^{10}/8^{1/4}$

התשובה בעמוד 267

שאלה 9

פשטו את הביטויים הבאים:

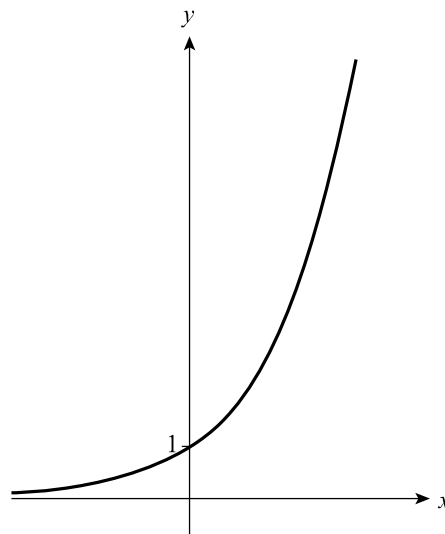
א. $\sqrt[5]{a^2b}/(\sqrt[7]{a})^3$ ב. $(ab^2)^{3/4}/\sqrt[4]{a^3b^4}$
 ג. $a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ ד. $\sqrt[n]{a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n}$

הערה: הניחו ש- $a > 0$, $b > 0$ ו- n מספר טבעי.

התשובה בעמוד 268

תכונות הפונקציה $f(x) = a^x$ יהי $a > 0$ מספר קבוע, ונתבונן בפונקציה $f(x) = a^x$.

כמה מתכונות החזקה הממשית מבוטאות בצורה פשוטה כתכונותיה של פונקציה זו.

נתבונן בנפרד במקרים $a > 1$ ו- $0 < a < 1$.במקרה ש- $a > 1$, גרף הפונקציה $f(x) = a^x$ נראה כך:

מגרף זה ניתן ללמוד על התכונות הבאות:

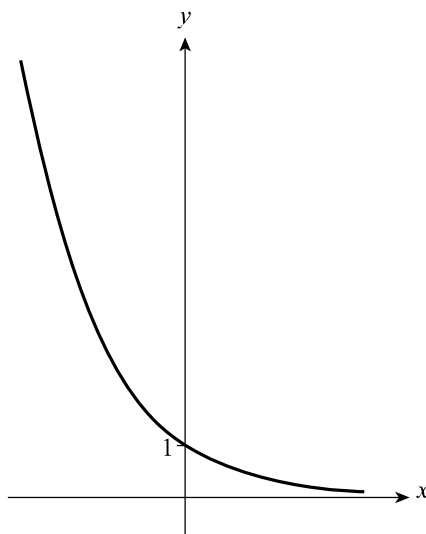
א. הפונקציה $f(x) = a^x$ עולה.כלומר: אם $x_1 < x_2$ אז $a^{x_1} < a^{x_2}$.ב. תמונת הפונקציה $f(x) = a^x$ היא הקטע $(0, \infty)$.

לא נוכיח את טענות א ו-ב בקורס זה, אלא נקבלן כחלק מהתכונות היסודיות של פעולת החזקה.

בשיעור הקודם למדנו שפונקציה מונוטונית (כלומר עולה או יורדת) היא חח"ע. מתכונה א נובע, אפוא:

ג. הפונקציה $f(x) = a^x$ היא חח"ע.

כעת נתבונן במקרה $0 < a < 1$. במקרה זה גרף הפונקציה נראה כך:



תכונות הפונקציה במקרה זה הן:

א. הפונקציה $f(x) = a^x$ יורדת.

כלומר: אם $x_1 < x_2$ אז $a^{x_1} > a^{x_2}$.

הוכחה:

נסיק את נכונות טענה זו מנכונותה במקרה $a > 1$.

מההנחה $0 < a < 1$ נובע ש- $1/a > 1$. לכן:

$$\left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^{x_1}} < \frac{1}{a^{x_2}}$$

לפי חוקי החזקות:

נבצע "1 חלקי" לשני האגפים (אפשרי כי שני האגפים חיוביים): $\Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ □

ב. תמונת הפונקציה $f(x) = a^x$ היא הקטע $(0, \infty)$.

הוכחה:

לפי תכונות פעולת החזקה, $f(x) = a^x > 0$ לכל x ממשי.

קעת נניח ש- y הוא מספר חיובי כלשהו, ונוכיח ש- y הוא ערך של הפונקציה f .

נתבונן בפונקציה הבאה:

$$g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$$

מהידוע לנו במקרה $a > 1$ נובע שתמונת הפונקציה g היא הקטע $(0, \infty)$.

מההנחה $y > 0$ נובע ש- $1/y > 0$. לכן $1/y$ הוא ערך של הפונקציה g , כלומר קיים x

ממשי כך ש- $g(x) = 1/y$. לכן:

$$\square \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{a^x} = \frac{1}{y} \Rightarrow a^x = y$$

ג. הפונקציה $f(x) = a^x$ היא חח"ע.

כמו במקרה $a > 1$, טענה זו נובעת מיידית מטענה א: f יורדת, ובפרט מונוטונית, ולכן

חח"ע.

נסכם:

לכל $a \neq 1$ חיובי, הפונקציה $f(x) = a^x$ היא חח"ע, מונוטונית, ותמונתה היא $(0, \infty)$.

הפונקציה עולה אם $a > 1$ ויורדת אם $0 < a < 1$. תכונות אלה של פעולת החזקה

מאפשרות לפתור משוואות מעריכיות ואי־שוויונות מעריכיים, כפי שנראה מיד.

משוואות מעריכיות

נקרא בשם **משוואה מעריכית** לכל משוואה שבה נעלם מופיע במעריך של חזקה כלשהי.

בפתרון של משוואות מעריכיות ניעזר, בדרך כלל, בחוקי החזקות והשורשים, ובתכונות

החד־חד־ערכיות של פונקציית החזקה. נתבונן בכמה דוגמאות:

א. המשוואה $a^x = a^b$:

מתכונת החד־חד־ערכיות של פונקציית החזקה נובע שהפתרון היחיד של משוואה זו

הוא $x = b$. למשל, המשוואה $2^x = 8$ ניתנת לביטוי בצורה $2^x = 2^3$, ולכן פתרונה

היחיד הוא $x = 3$.

דרך שימושית לפתרון משוואות מעריכיות היא הבאתן למשוואה שקולה מהצורה

$a^x = a^b$. נראה זאת בדוגמאות הבאות.

ב. נתבונן במשוואה: $2^x + 2^{x+1} = 6$

לפי חוקי החזקות, $2^{x+1} = 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x$. לכן נקבל משוואה שקולה:

$$\Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot 2^x = 6$$

$$\Leftrightarrow 3 \cdot 2^x = 6$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^1$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

לפי חד-חד-ערכיות הפונקציה $f(x) = 2^x$:

$$4^{x+1} = 9 \cdot 2^x - 2$$

ג. נתבונן במשוואה:

בעזרת חוקי החזקות, נבטא את האגף השמאלי כך:

$$4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1 = 4 \cdot (2^2)^x = 4 \cdot 2^{2x} = 4 \cdot (2^x)^2$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 = 9 \cdot 2^x - 2$$

מתקבלת המשוואה השקולה:

$$\Leftrightarrow 4t^2 = 9t - 2$$

נסמן: $t = 2^x$. מתקבלת המשוואה:

$$\Leftrightarrow 4t^2 - 9t + 2 = 0$$

קיבלנו משוואה ריבועית. נפתור אותה:

$$\Leftrightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{8} = \frac{9 \pm 7}{8}$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \text{ או } t = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 2 \text{ או } 2^x = \frac{1}{4}$$

נחזור למשתנה המקורי:

$$\Leftrightarrow 2^x = 2^1 \text{ או } 2^x = 2^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ או } x = -2$$

לפי חד-חד-ערכיות הפונקציה $f(x) = 2^x$:

מצאנו שפתרונות המשוואה הם 1 ו-2.

שאלה 10

פתרו את המשוואות הבאות:

ב. $10^x = 0.00001$

א. $3^x = 3\sqrt{3}$

ד. $(2^x)^x \cdot 4^x = 8$

ג. $6 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 9$

ו. $3^{x+1} + \frac{4}{3^x - 1} = -5$

ה. $2^x + 2(\sqrt{2})^x = 8$

ח. $9 \cdot 4^x + 5 \cdot 6^x = 4 \cdot 9^x$

ז. $125 \cdot 2^x = 8 \cdot 5^x$

התשובה בעמוד 268

אי-שוויונות מעריכיים

בדומה למשוואות המעריכיות, אי-שוויון מעריכי הינו אי-שוויון שבו מופיע נעלם במעריך של חזקה כלשהי. בפתרון של אי-שוויונות מעריכיים נסתייע במונוטוניות הפונקציה המעריכית $f(x) = a^x$:

- עבור $a > 1$, האי-שוויון $a^x > a^b$ שקול לאי-שוויון $x > b$ (כי f עולה).
- עבור $0 < a < 1$, האי-שוויון $a^x > a^b$ שקול לאי-שוויון $x < b$ (כי f יורדת).

דוגמאות:

א. נתבונן באי־שוויון

$$\frac{3}{1+2^x} < 2$$

לפי תכונות החזקה, $2^x > 0$. לכן $1+2^x > 0$. נכפיל בביטוי זה, לקבלת אי־שוויון

שקול:

$$\Leftrightarrow 3 < 2(1+2^x)$$

$$\Leftrightarrow 1+2^x > \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^x > \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2^x > 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x > -1$$

ממונוטוניות פונקציית החזקה $f(x) = 2^x$:קבוצת הפתרונות היא $(-1, \infty)$.

ב. נתבונן באי־שוויון

$$4^{x+1} + 3 \cdot 2^x \leq 1$$

נבטאו באופן שקול:

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 4^x + 3 \cdot 2^x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot (2^x)^2 + 3 \cdot 2^x \leq 1$$

נגדיר: $t = 2^x$, ונקבל אי־שוויון ריבועי:

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 3t - 1 \leq 0$$

כדי לפותרו, נפתור תחילה את המשוואה הריבועית $4t^2 + 3t - 1 = 0$:

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8} \Rightarrow t = -1 \text{ או } t = \frac{1}{4}$$

מהתבוננות בפרבולה $y = 4t^2 + 3t - 1$ נקבל שהאי־שוויון הריבועי שקול ל:

$$\Leftrightarrow -1 \leq t \leq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 2^x \leq \frac{1}{4}$$

נחזור למשתנה המקורי:

$$\Leftrightarrow 2^x \leq \frac{1}{4} \quad \text{האי־שוויון } 2^x \geq -1 \text{ מתקיים תמיד כי } 2^x \text{ מספר חיובי. לכן:}$$

$$\Leftrightarrow 2^x \leq 2^{-2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq -2$$

ממונוטוניות פונקציית החזקה $f(x) = 2^x$:קבוצת הפתרונות היא, אפוא, $(-\infty, -2]$.

שאלה 11

פתרו את האי־שוויונות הבאים:

$$\text{א. } (0.1)^x < 1000$$

$$\text{ב. } 2^x + 5^x \leq 5^{x+1} - 2^{x+3} - 2^{x+4}$$

$$\text{ג. } 2^{x^2+1} > \left(\frac{1}{8}\right)^x$$

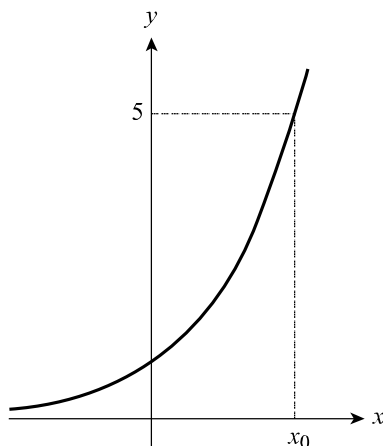
$$\text{ד. } \frac{9 - 13 \cdot 3^x}{3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3} < 1$$

הלוגריתם

אנו יודעים כיצד לפתור משוואה מהצורה $a^x = a^b$. לדוגמה, כדי לפתור את המשוואה $2^x = 16$, נבטא בצורה $2^x = 2^4$, ונקבל שפתרונה היחיד הוא $x = 4$.

אך כיצד נוכל לפתור את המשוואה $2^x = 5$? במקרה זה אין פתרון שלם למשוואה, וניתן אף להוכיח שאין פתרון רציונלי.

נתבונן בגרף הפונקציה $f(x) = 2^x$:



כפי שלמדנו, תמונת הפונקציה f היא $(0, \infty)$. לכן 5 נמצא בתמונת הפונקציה, כלומר קיים מספר x_0 המקיים $2^{x_0} = 5$. מספר זה הוא יחיד כי f היא חח"ע.

כדי למצוא את x_0 נחוצה לנו **פעולה חדשה** שתגדיר פונקציה הפוכה לפונקציה f , ובאופן כללי, לכל פונקציית חזקה $f(x) = a^x$. פעולה זו נקראת **לוגריתם**. הנה הגדרתה:

הגדרה – לוגריתם

יהי a מספר חיובי, ונניח ש- $a \neq 1$.

יהי b מספר חיובי כלשהו.

הלוגריתם של b לפי הבסיס a , המסומן $\log_a b$, הוא המספר x המקיים $a^x = b$.

המספר x המופיע בהגדרה קיים כי b (בהיותו מספר חיובי) נמצא בתמונת הפונקציה $f(x) = a^x$, שהיא $(0, \infty)$. מספר זה הוא יחיד, כי f היא פונקציה חח"ע.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$$

מההגדרה נובעת השקילות

$$a^{\log_a b} = b$$

ונובעות הנוסחאות הבאות:

$$\log_a a^x = x$$

הנה כמה דוגמאות לחישובי לוגריתמים:

א. $\log_{10} 1000 = 3$, כי $10^3 = 1000$.

ב. $\log_2 \sqrt{2} = 1/2$, כי $2^{1/2} = \sqrt{2}$.

ג. $\log_5 1/5 = -1$, כי $5^{-1} = 1/5$.

ד. $\log_{1/5} 25 = -2$, כי $(1/5)^{-2} = 1/(1/5)^2 = 1/(1/25) = 25$.

שאלה 12

חשבו את הלוגריתמים הבאים:

א. $\log_2 8$ ב. $\log_{10} 0.1$ ג. $\log_3 81$ ד. $\log_3 3\sqrt{3}$
ה. $\log_2 1024$ ו. $\log_{25} 5$ ז. $\log_{0.5} 4$ ח. $\log_3 \sqrt[5]{9}$

התשובה בעמוד 272

נחזור עתה אל המשוואה $2^x = 5$. לפי הגדרת הלוגריתם, פתרונה היחיד של המשוואה הוא

$$x = \log_2 5 \approx 2.3219$$

◁ חישוב הפיתוח העשרוני של מספר מסוג זה מתבצע, בדרך כלל, בעזרת מחשבון.

בעזרת לוגריתמים נוכל לפתור, אם כן, משוואה מהצורה $a^x = b$. בשאלה הבאה ניישם יכולת זו לניתוח של גידול מעריכי:

שאלה 13

בתוכנית חיסכון הנושאת ריבית שנתית של 2%, הופקדו 1000 שקלים. ניתן לפדות את הכסף בכל עת.

א. לאחר כמה זמן יגיע החיסכון ל-1100 שקלים?

ב. לאחר כמה זמן יגיע החיסכון ל-2000 שקלים?

התשובה בעמוד 272

ניתן לפתור משוואות מעריכיות מסובכות יותר על ידי הבאתן לצורה $a^x = b$. נראה דוגמאות לכך בשאלה הבאה.

שאלה 14

פתרו את המשוואות הבאות:

א. $2^x = 3$ ב. $10^x = 5$

ג. $2^x + 4^x = 7$ ד. $10^x + 10^{-x} = 3$

התשובה בעמוד 273

חוקי הלוגריתמים

התכונות הבאות של הלוגריתם נובעות באופן ישיר מחוקי החזקות. נניח בכולן ש- a (בסיס הלוגריתם) הוא מספר חיובי ושונה מ-1.

א. הלוגריתם של 1:

$$\log_a 1 = 0$$

שוויון זה נובע מיידית מהשוויון $a^0 = 1$.

ב. לוגריתם של מכפלה:

לכל $c > 0, b > 0$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$$

במילים:

לוגריתם של מכפלה שווה לסכום הלוגריתמים של הגורמים.

הוכחה:

נסמן $y = \log_a c, x = \log_a b$. נקבל: $bc = a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

$$\log_a bc = x + y = \log_a b + \log_a c$$

ג. לוגריתם של מנה:

לכל $c > 0, b > 0$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

במילים:

לוגריתם של מנה שווה להפרש הלוגריתמים של המונה והמכנה.

הוכחה:

נסמן $y = \log_a c, x = \log_a b$. נקבל: $\frac{b}{c} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

$$\log_a \frac{b}{c} = x - y = \log_a b - \log_a c$$

ד. לוגריתם של חזקה:

לכל $b > 0$ ולכל c ממשי,

$$\log_a b^c = c \log_a b$$

במילים:

לוגריתם של חזקה שווה למכפלת מעריך החזקה בלוגריתם של בסיס החזקה.

הוכחה:

נסמן $x = \log_a b$. נקבל: $b^c = (a^x)^c = a^{xc}$

$$\log_a b^c = xc = c \log_a b$$

ה. לוגריתם של שורש מסדר כלשהו:

לכל $b > 0$ ולכל n טבעי,

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n}$$

שוויון זה יוכח בשאלה 15 להלן.

ו. נוסחת שינוי הבסיס:

לכל $c > 0, b > 0$

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$$

במילים:

כדי לחשב לוגריתם לפי בסיס חדש, יש לחלק את הלוגריתם לפי הבסיס המקורי בלוגריתם של הבסיס החדש לפי הבסיס המקורי.

הוכחה:

נסמן $y = \log_a c, x = \log_c b$. נקבל: $b = c^x = (a^y)^x = a^{xy}$

$$\log_a b = xy = \log_c b \cdot \log_a c$$

מכאן, חלוקת השוויון שהתקבל ב- $\log_a c$ מובילה לשוויון המבוקש.

שאלה 15

א. הוכיחו את נוסחת הלוגריתם של שורש: $\log_a \sqrt[n]{b} = (\log_a b)/n$.

ב. הוכיחו את הנוסחה $\log_a (1/b) = -\log_a b$.

ג. הוכיחו את הנוסחה $\log_b a = 1/\log_a b$.

התשובה בעמוד 273

נדגים את השימוש בחוקי הלוגריתמים בפישוט של ביטויים מספריים ותבניות מספר:

א. נחשב את ערך הביטוי $\log_3(81/9^7)$:

$$\begin{aligned}\log_3 \frac{81}{9^7} &= \log_3 81 - \log_3 9^7, & \text{לפי חוק הלוגריתם של מנה,} \\ &= \log_3 81 - 7 \cdot \log_3 9, & \text{לפי חוק הלוגריתם של חזקה,} \\ &= 4 - 7 \cdot 2 = -10\end{aligned}$$

ב. נפשט את הביטוי $\log_2(x^{10} \cdot \sqrt[3]{y})$:

$$\begin{aligned}\log_2(x^{10} \cdot \sqrt[3]{y}) &= \log_2 x^{10} + \log_2 \sqrt[3]{y}, & \text{לפי חוק הלוגריתם של מכפלה,} \\ &= 10 \log_2 x + \frac{\log_2 y}{3}, & \text{לפי חוקי הלוגריתמים של חזקה ושורש,}\end{aligned}$$

ג. נחשב את ערך הביטוי $\log_{\sqrt[10]{10}} 100$ בעזרת נוסחת שינוי הבסיס. הבסיס החדש שנבחר הוא 10:

$$\log_{\sqrt[10]{10}} 100 = \frac{\log_{10} 100}{\log_{10} \sqrt[10]{10}} = \frac{2}{\frac{1}{10} \log_{10} 10} = 2 : \frac{1}{10} = 20$$

שאלה 16

פשטו את הביטויים הבאים:

$$\begin{array}{ll}\text{א. } \log_2 7 - \log_2 56 & \text{ב. } \log_{\sqrt{2}}(0.5^{0.5} \cdot 16) \\ \text{ג. } \log_2 5 - \log_4 100 & \text{ד. } \log_{\sqrt{2}} 3 - \log_2 12 - \log_4 18 \\ \text{ה. } \log_2(4xy^2) & \text{ו. } \log_5 \frac{x^{100}}{\sqrt{5y}} \\ \text{ז. } \log_x y^2 \cdot \log_y x^2 & \text{ח. } \log_a(b^a \cdot a^b \cdot \sqrt{ab})\end{array}$$

התשובה בעמוד 274

בסיסים מקובלים ללוגריתם

בהקשרים רבים, אין חשיבות מיוחדת לבחירת הבסיס לחישוב הלוגריתם, אך חשוב לשמור על בסיס קבוע לאורך כל החישוב. הבחירות המקובלות הן:

א. **בסיס 10**. בחירה זו היא טבעית כי 10 הוא בסיס הספירה המקובל על בני האדם.

כאשר מציינים $\log$ ללא בסיס, מניחים שהבסיס הוא 10. לדוגמה:

$$\begin{aligned}\log 100 &= \log_{10} 100 = 2 \\ \log 1,000,000 &= \log_{10} 1,000,000 = 6 \\ \log 0.1 &= \log_{10} 0.1 = -1\end{aligned}$$

ב. **הבסיס e**.

המספר e , הנקרא **הקבוע של אוילר** (על שם המתמטיקאי השווייצרי הדגול לאונרד

אוילר) הוא מספר אי-רציונלי שפיתוחו העשרוני מתחיל בספרות הבאות:

$$e = 2.718281828459...$$

הגדרתו המתמטית של מספר זה קשורה לסדרת המספרים הבאה:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

כמה מאיבריה של סדרה זו הם

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2.25 \\ a_{10} &= 2.5937\dots \\ a_{100} &= 2.7048\dots \\ a_{1000} &= 2.7169\dots \end{aligned}$$

ככל ש- n הולך וגדל, איברי הסדרה הולכים ומתקרבים אל מספר מסוים, והוא המספר e . בסימוני תורת הגבולות (שלא נלמד לעומק בקורס זה):

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

בשלב זה נתייחס אל המספר e כאל מספר שרירותי.

מסיבות שיובהרו בהמשך (בשיעורים 11,12) יש יתרונות בשימוש ב- e כבסיס ללוגריתם. יתרונות אלה הם כה משמעותיים עד שהלוגריתם לפי הבסיס e מכונה **הלוגריתם הטבעי** ומסומן כך: $\ln$ (קיצור הביטוי הלטיני: logarithmus naturalis). ובכן:

$$\ln x = \log_e x$$

למען החזרה, נכתוב את חוקי הלוגריתמים בבסיס e :

$$\ln 1 = 0 \quad \text{לוגריתם טבעי של 1:}$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad \text{לוגריתם טבעי של מכפלה:}$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad \text{לוגריתם טבעי של מנה:}$$

$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{\ln a}{n} \quad \text{לוגריתם טבעי של שורש:}$$

$$\ln a^b = b \ln a \quad \text{לוגריתם טבעי של חזקה:}$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \quad \text{נוסחת שינוי הבסיס לבסיס הטבעי:}$$

במבט נוסף על רשימת החוקים שמקיימים הלוגריתמים נוכל להבחין ביעילותם החישובית. לדוגמה, הנוסחה $\ln ab = \ln a + \ln b$ מאפשרת להמיר פעולת כפל בפעולת חיבור.

לפני עידן המחשבים ומחשבוני הכיס, היה נפוץ השימוש בלוגריתמים בחישובים מעשיים. העוסקים בחישובים היו מצוידים בלוחות לוגריתמים, שהם טבלאות המכילות ערכי לוגריתמים של מספרים. באופן זה הם המירו פעולות מסובכות כגון כפל, חילוק, שורש וחזקה בפעולות פשוטות יותר של חיבור וחסור. מתקן נוסף שהיה בשימוש הוא סרגל החישוב, המורכב משתי סקאלות לוגריתמיות, המחליקות זו על פני זו. מתקן זה איפשר ביצוע מהיר של חילוק וכפל מקורבים.

כיום שיטות אלה שייכות להיסטוריה, אך חשיבותם התיאורטית והמעשית של הלוגריתמים בתחומים רבים נותרה כשהיתה.

שאלה 17

א. חשבו את $\ln e$ ואת $\ln e^5$.

ב. חשבו (בעזרת מחשבון או מחשב) את $\ln 5$.

ג. הוכיחו כי היחס $\ln a / \log a$ הוא מספר קבוע שאינו תלוי ב- a . מצאו את המספר הזה.

ד. הוכיחו את הזהות: $a^b = e^{b \ln a}$.

התשובה בעמוד 275

פונקציות לוגריתמיות

יהי a מספר חיובי ושונה מ-1. נתבונן בפונקציות:

$$f(x) = a^x, \quad g(x) = \log_a x$$

$$a^x = y \Leftrightarrow x = \log_a y$$

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = g(y)$$

לפי הגדרת הלוגריתם, מתקיים

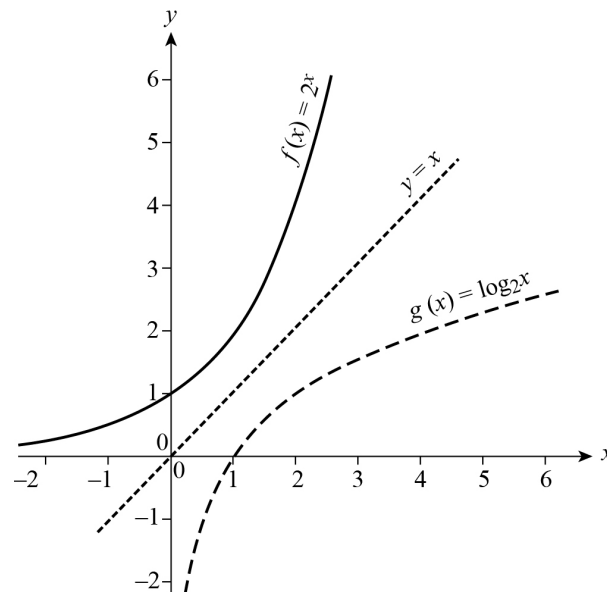
כלומר:

לכן g היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה f .

גרף הפונקציה הלוגריתמית $g(x) = \log_a x$ מתקבל אפוא משיקוף גרף הפונקציה

המעריכית $f(x) = a^x$ ביחס לישור $y = x$.

לדוגמה, הנה הגרפים של $f(x) = 2^x$ ו- $g(x) = \log_2 x$:



ניתן לראות שערכי y בגרף הפונקציה $g(x) = \log_2 x$ גדלים באיטיות רבה כאשר מגדילים את x . לדוגמה, הערך $y = 10$ מתקבל עבור $x = 2^{10} = 1024$, והערך $y = 20$ מתקבל עבור $x = 2^{20}$, מספר הגדול ממיליון.

כמו כן, ניתן לראות שציר ה- y הוא אסימפטוטה אנכית של הגרף. כש- $0 < x < 1$ הולך ומתקרב ל-0, הפונקציה מקבלת ערכים שליליים שהולכים וגדלים בערכם המוחלט.

תכונות הפונקציה הלוגריתמית $g(x) = \log_a x$ מסוכמות בטענה הבאה:

טענה

יהי a מספר חיובי שונה מ-1, ותהי $g(x) = \log_a x$.

א. תחום ההגדרה של הפונקציה g הוא $(0, \infty)$.

ב. תמונת הפונקציה g היא $\mathbb{R}$.

ג. g היא פונקציה מונוטונית: עולה אם $a > 1$, ויורדת אם $0 < a < 1$.

הוכחה

א. g היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה המעריכית $f(x) = a^x$. לכן תחום הגדרתה הוא תמונת הפונקציה f , שהוא $(0, \infty)$, כפי שראינו בעבר.

ב. לכל מספר ממשי y מתקיים $y = \log_a a^y = g(a^y)$. לכן כל מספר ממשי הוא ערך של הפונקציה g , ומכך נובע שתמונתה היא $\mathbb{R}$.

ג. g היא פונקציה הפוכה לפונקציה המעריכית $f(x) = a^x$, וכפי שראינו בעבר, f היא עולה אם $a > 1$, ויורדת אם $0 < a < 1$. הוכחנו בשאלה 41 בשיעור 6 שאם f היא פונקציה מונוטונית אז גם f^{-1} היא מונוטונית, במגמה זהה (עולה אם f עולה ויורדת אם f יורדת). לכן $g = f^{-1}$ היא עולה אם $a > 1$, ויורדת אם $0 < a < 1$. $\square$

מטענה זו נסיק את המסקנות המיידיות הבאות:

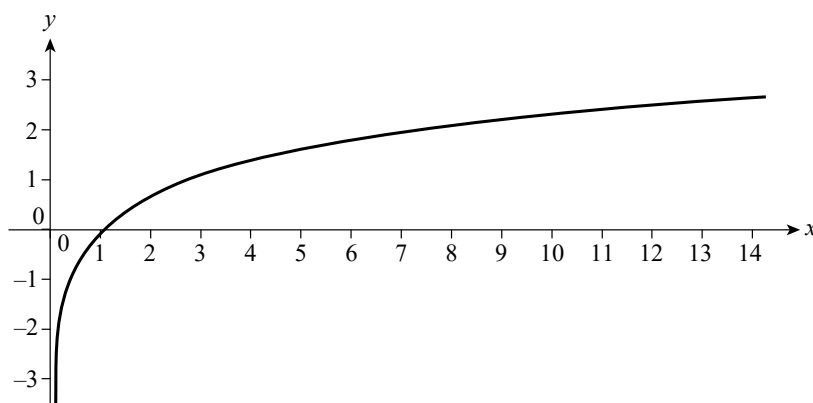
א. הפונקציה $g(x) = \log_a x$ היא חח"ע, כי כל פונקציה מונוטונית היא חח"ע.

ב. נניח ש- $a > 1$. אז $\log_a x > 0$ אם $x > 1$, ו- $\log_a x < 0$ אם $0 < x < 1$.

ואכן, במקרה זה $g(x) = \log_a x$ היא עולה. לכן אם $x > 1$ אז $\log_a x > \log_a 1 = 0$,

ואם $0 < x < 1$ אז $\log_a x < \log_a 1 = 0$.

נוסיף ונתבונן בגרפים של פונקציות לוגריתמיות. הנה גרף הפונקציה $g(x) = \ln x = \log_e x$:



גרף זה דומה מאוד לגרף הפונקציה $\log_2 x$.

למעשה, כל הגרפים של הפונקציות $g(x) = \log_a x$ עבור $a > 1$, דומים זה לזה. תופעה זו נובעת מנוסחת שינוי הבסיס, כי:

$$(1) \quad \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

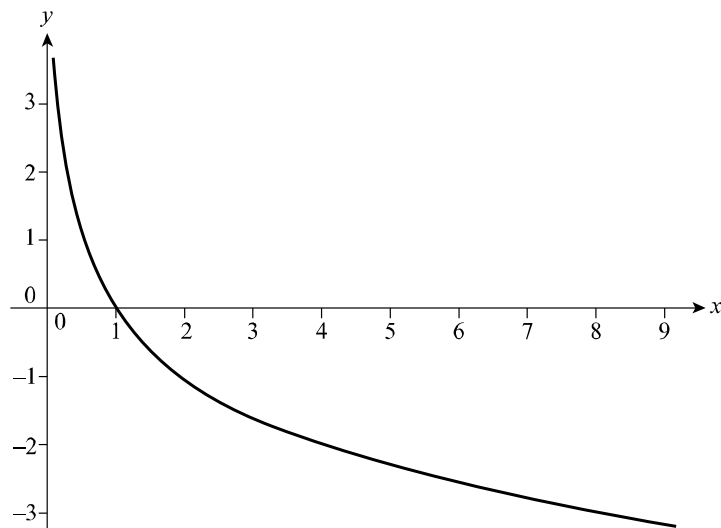
וכפי שראינו לעיל, במקרה ש- $a > 1$ ו- $b > 1$ מתקיים $\log_b a > 0$. לכן כל אחת מהפונקציות $g(x) = \log_a x$ מתקבלת מרעותה על ידי כפל בקבוע חיובי.

כעת נתבונן במקרה $0 < a < 1$. נגדיר $b = 1/a$, ונקבל לפי נוסחה (1),

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = -\log_b x \quad \log_b a = \log_b(b^{-1}) = -1 <$$

מתקיים $b > 1$. לכן גרף הפונקציה $\log_a x$ הוא שיקוף ביחס לציר ה- x של גרף פונקציה לוגריתמית עם בסיס גדול מ-1.

לדוגמה, כך נראה גרף הפונקציה $g(x) = \log_{1/2} x = -\log_2 x$:



משוואות לוגריתמיות

משוואה הכוללת את פעולת הלוגריתם נקראת **משוואה לוגריתמית**. בפתרון של משוואות לוגריתמיות נסתייע בחוקי הלוגריתמים שלמדנו.

לדוגמה, נתבונן במשוואה $\log x + \log(1-x) = -1$

מכיוון שלא צוין בסיס, הלוגריתם הוא לפי בסיס 10.

נבדוק תחילה מהו תחום ההגדרה של האגף השמאלי. כדי שהביטוי באגף זה יהיה מוגדר, צריך להתקיים $x > 0$ וגם $1-x > 0$, כלומר $0 < x < 1$. נניח מעתה ש- x מקיים את התנאי הזה.

באמצעות חוקי הלוגריתמים נקבל משוואה שקולה:

$$\Leftrightarrow \log(x(1-x)) = -1$$

לפי הגדרת הלוגריתם:

$$\Leftrightarrow x(1-x) = 10^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x - x^2 = \frac{1}{10}$$

קיבלנו משוואה ריבועית:

$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{10} = 0$$

$$\Leftrightarrow 10x^2 - 10x + 1 = 0$$

נפתור:

$$\Leftrightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{60}}{20}$$

מתקבלים הפתרונות

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{60}}{20} \approx 0.1127, \quad x_2 = \frac{10 + \sqrt{60}}{20} \approx 0.8873$$

שני הפתרונות הם בין 0 ל-1, כלומר שייכים לתחום ההגדרה של אגפי המשוואה המקורית. לכן אלה הם פתרונות המשוואה.

שאלה 18

פתרו את המשוואות הבאות:

ב. $\log_2 x + \log_4 x = 5$

א. $\log_3 x = 2$

ד. $\ln \ln x = 2$

ג. $5^{\log_2 x} = 9$

ו. $e^{2 \ln x} + e^{\ln x} = 2$

ה. $\log_x(x+1) = 2$

ח. $\log x \cdot \log(-x) = 1$

ז. $\log x - \frac{\log(x+1)}{2} = 1.5$

התשובה בעמוד 275

אי-שוויונות לוגריתמיים

בפתרון של אי-שוויונות הכוללים לוגריתמים ניעזר בחוקי הלוגריתמים, וכן במונוטוניות הפונקציות הלוגריתמיות, שממנה נובעות השקילויות הבאות:

עבור $a > 1$,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

עבור $0 < a < 1$,

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

נדגים זאת במקרים הבאים:

$$\log_2 x < 3$$

א. נפתור את האי-שוויון

ראשית נשים לב שכדי שהאגף השמאלי יהיה מוגדר, צריך להתקיים $x > 0$. נניח מעתה

שתנאי זה מתקיים. נבטא את האגף הימני כלוגריתם בבסיס 2: $3 = \log_2 8$

מתקבל אי-שוויון שקול:

$$\Leftrightarrow \log_2 x < \log_2 8$$

הבסיס, 2, גדול מ-1, לכן מתקבלת השקילות

$$\Leftrightarrow x < 8$$

מניחוח זה מתקבל ש- x מקיים את האי-שוויון המקורי אם $0 < x < 8$.

קבוצת הפתרונות היא, אפוא, הקטע $(0, 8)$.

הערה: דרך נוספת לפתור את האי־שוויון היא העלאת 2 בחזקת שני אגפי האי־שוויון:

$$\log_2 x < 3 \Leftrightarrow 2^{\log_2 x} < 2^3 \Leftrightarrow x < 8$$

השקילות בדרך זו נובעת מכך שהפונקציה המעריכית $f(x) = 2^x$ עולה.

$$\log_x(x+1) < 2$$

ב. נפתור את האי־שוויון

כדי שהאגף השמאלי יהיה מוגדר, צריך להתקיים $x > 0$ ו־ $x \neq 1$. נניח מעתה שתנאים אלה מתקיימים.

$$2 = \log_x x^2$$

נבטא את האגף הימני כלוגריתם בבסיס x :

$$\Leftrightarrow \log_x(x+1) < \log_x x^2$$

מתקבל אי־שוויון שקול:

כעת נתבונן בנפרד במקרים הבאים:

מקרה א: $x > 1$

$$\Leftrightarrow x+1 < x^2$$

במקרה זה מתקבלת השקילות

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 > 0$$

פתרונות המשוואה הריבועית $x^2 - x - 1 = 0$ הם

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.618, \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

$$\Leftrightarrow x < x_1 \text{ או } x > x_2$$

מכאן,

$$\Leftrightarrow x > x_2$$

המקרה $x < x_1$ אינו מתיישב עם ההנחה $x > 1$. לכן:

מקרה ב: $0 < x < 1$

$$\Leftrightarrow x+1 > x^2$$

במקרה זה מתקבלת השקילות

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 < x < x_2$$

לפי ההנחה $0 < x < 1$, תנאי זה מתקיים תמיד.

מאיחוד הפתרונות בשני המקרים, נקבל שקבוצת הפתרונות של האי־שוויון היא

$$(0,1) \cup (x_2, \infty), \text{ כלומר } (0,1) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right).$$

שאלה 19

פתרו את האי־שוויונות הבאים:

ב. $\log(x+1) - \log x > 3$

א. $\log x \geq -2$

ד. $(\ln x)^{\ln x} > x^2$

ג. $\sqrt{\log_2 x} \geq \log_4(x/4)$

סיכום שיעור 7

בתחילת השיעור הרחבנו את הגדרת פעולת החזקה לבסיס חיובי ומעריך ממשי כלשהו. כך התאפשרה הגדרתן של פונקציות מעריכיות המופיעות בהקשרים יומיומיים ומדעיים.

הגדרנו את פעולת הלוגריתם, המאפשרת לשחזר את המעריך בהינתן הבסיס ותוצאת פעולת החזקה, ולמדנו את תכונותיה.

חלק מהתכונות של פעולת החזקה היו הנחות יסוד שקיבלנו כנתונות, ומהן הסקנו את שאר התכונות, ואת תכונות הלוגריתמים. היכולת להבחין בין הנחות למסקנות היא, כמובן, חשובה. כמוה, חשובה היכולת לאתר את הכלים הרלוונטיים לפתרון בעיה נתונה.

לדוגמה, כאשר נתון סכום של לוגריתמים, באפשרותנו לבטאו כלוגריתם של מכפלה; ולהפך, כאשר נתון לוגריתם של מכפלה, ניתן לבטאו כסכום של לוגריתמים. בדומה, כאשר נתונה מכפלה של לוגריתם במספר מסוים, באפשרותנו לבטאה כלוגריתם של חזקה, ולהפך. היכולת לאתר את הצעד שיקדם אתכם אל פתרון הבעיה היא פועל יוצא של הניסיון המצטבר בפתרון בעיות. ככל שתרכבו לתרגל, תשתכלל היכולת, ויגבר ביטחונכם ביכולת זו.

לעתים הלימוד הטוב ביותר הוא מבעיה שלא הצלחתם לפתור. אם ניסיתם בכל מאודכם לפתור בעיה מסוימת ועדיין לא הצלחתם, קרוב לוודאי שתוכלו להפיק מקריאת פתרונה לקחים משמעותיים שילוו אתכם בפתרון בעיות בעתיד. כך תשיגו שיפור ניכר.

שאלות להערכה עצמית

שאלה 20

התשובה בעמוד 279

נתון ש- $\log_a b = 5$. חשבו את $\log_{a^2} \sqrt[3]{b}$.

שאלה 21

פתרו את המשוואות:

א. $\ln(5x^2) = 8 + \ln x$

ב. $\log_8 x + \log_x 8 = 4$

ג. $x\sqrt{2} + x^2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

ד. $x\sqrt{x} = 10$

התשובה בעמוד 279

שאלה 22

פתרו את האי־שוויונות:

א. $4^{x+1} + 10^{x+2} \geq 25^x$

ב. $\log \sqrt{x} \leq \sqrt{\log x}$

ג. $\ln(6-x) \leq 1 - \ln x$

התשובה בעמוד 280

שאלה 23

תהי $a_1, a_2, \dots, a_n$ סדרה הנדסית, שכל איבריה חיוביים.הוכיחו שהסדרה $\sqrt[3]{a_1}, \sqrt[3]{a_2}, \dots, \sqrt[3]{a_n}$ היא סדרה הנדסית.

התשובה בעמוד 280

שאלה 24

בתוכנית חיסכון בעלת ריבית קבועה, הופקדו 500 שקלים. כעבור 3.5 שנים התגלה כי בתוכנית יש 700 שקלים.

א. מהי הריבית השנתית בתוכנית זו?

ב. באיזה שלב במהלך החיסכון חצה סכום החיסכון את רף 600 השקלים?

התשובה בעמוד 282

שאלה 25

יהי $a \neq 0$. נתבונן בפונקציה $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^a$ א. הוכיחו ש- f עולה אם $a > 0$ ויורדת אם $a < 0$.ב. מצאו את תמונת הפונקציה f .ג. מצאו את הפונקציה ההפוכה ל- f . כיצד ניתן לבטאה במקרה ש- a הוא מספר טבעי?

התשובה בעמוד 283

שאלה 26

”פעולות השורש והלוגריתם הן פעולות הפוכות לפעולת החזקה, אך במובנים שונים”.

הסבירו את משמעות המשפט באופן מדויק.

התשובה בעמוד 284

שאלה 27

הוכיחו שאם m ו- m' מספרים שלמים, ואם n ו- n' מספרים טבעיים, כך ש- $m/n = m'/n'$, אז $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[n']{a}\right)^{m'}$.

הדרכה: העלו את שני אגפי השוויון המבוקש בחזקת nn' והוכיחו שמתקבל אי-שוויון שקול. היעזרו בכך שהפונקציה $f(x) = x^{nn'}$ חח"ע בקטע $[0, \infty)$.

הערה: משמעות הטענה שבשאלה זו היא שהגדרת החזקה הרציונלית, $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$, אינה תלויה בייצוג המספר הרציונלי כשבר, ולכן יש לה משמעות (ראו עמוד 104).

התשובה בעמוד 284

שאלה 28

א. יהי n מספר טבעי. הוכיחו שמספר הספרות בייצוג העשרוני של n הוא $\lfloor \log n \rfloor + 1$.

תזכורת: הסימון $\lfloor x \rfloor$, שהוגדר בשיעור הקודם, מייצג את החלק השלם של x .

ב. כמה ספרות יש ב- 2^{1000} ? וכמה ב- $2^{1,000,000}$? (היעזרו במחשבון ובנוסחה שבסעיף הקודם).

התשובה בעמוד 284

שיעור 8

מושגים בגיאומטריה

הגיאומטריה היא ענף במתמטיקה העוסק בצורות, במידותיהן וביחסים ביניהן. חשיבותה של הגיאומטריה נובעת מהקשר שלה לעולם המוחשי, וגם מהנסיבות ההיסטוריות של התפתחות המתמטיקה. הגיאומטריה התפתחה כמדע שיטתי ביוון העתיקה, על בסיס של מושגי יסוד, ומספר מצומצם של טענות יסודיות הנקראות אקסיומות. מתוך מושגי היסוד הוגדרו מושגים מורכבים יותר ומתוך האקסיומות הוכחו טענות נוספות, שעליהן נבנו עוד טענות, וכך הלאה. כך בנויה תיאוריה מתמטית, כמבנה ארכיטקטוני העומד על תילו.

החיבור הנודע ביותר בנושא זה, ששרד בחלקו הגדול מאז ימי קדם, הוא סדרת הספרים 'היסודות' מאת המתמטיקאי היווני **אוקלידס**. בספרים אלה קיבץ אוקלידס את הידע שנצבר עד לזמנו וארגן אותו באופן שיטתי, במבנה הלוגי שתואר לעיל: אוסף של טענות המתבססות על אקסיומות ביחס למושגים יסודיים.

הגם שברבות השנים התגלו מספר אי־דיוקים והנחות מובלעות בחיבורו של אוקלידס, הוא מהווה בצורת כתיבתו מודל והשראה לתיאוריות מתמטיות עד לימינו. בשל חשיבותו נקראת הגיאומטריה של המישור והמרחב **גיאומטריה אוקלידית**.

מהפכות והתקדמויות במתמטיקה דחקו במידת מה את מקומה של הגיאומטריה הקלאסית. הגיאומטריה האנליטית, אשר ראשיתה בהמצאתו של דקארט, והטריגונומטריה שנלמד בשיעור הבא, הן חלק מהשיטות המחליפות כיום בהצלחה כמה מהשיטות הגיאומטריות הטהורות שהיו נהוגות בעבר. יחד עם זאת, מושגי היסוד של הגיאומטריה הם חלק ממארג הנושאים המרכיבים את הידע המתמטי הבסיסי, והכרתם היא חיונית להמשך לימודינו.

בשיעור זה נכיר את המושגים הבסיסיים בגיאומטריה וכמה ממשפטיה היסודיים. הלימוד בנושא זה יהיה תמציתי ומתוך מטרה לרכוש כלים שיאפשרו את לימוד נושאי השיעורים הבאים, וישמשו אתכם גם בלימודיכם האקדמיים העתידיים.

בשל כך, נציג משפטים רבים ללא הוכחה. אך יש הוכחות שהן נאות מכדי שנוכל להשמיטן, גם אם בסקירה עסקינן. לכן כלולות הוכחות לחלק מהמשפטים והטענות. גם אתם תתבקשו בשאלות השונות להוכיח טענות גיאומטריות פשוטות, בהתבסס על הטענות המופיעות בפרק זה. כך תתרגלו את החומר ותכירו במעט את חוויית העיסוק בנושא זה.

הקוראים שסקרונתם תתעורר מוזמנים להרחיב את לימודיהם בעתיד בנושא זה ולמצוא בו מקור עשיר לבעיות מעניינות ומאתגרות, המחددות את המחשבה ומפתחות את הדמיון.

< אוקלידס (ביוונית: Εὐκλείδης),
365 לפנה"ס – 275 לפנה"ס

מושגים יסודיים בגיאומטריה של המישור

עיסוקנו בשיעור זה יהיה בגיאומטריה של המישור, הנקראת גם **הנדסת המישור**. בימת ההתרחשויות שלה היא מישור, אותו נוכל לדמיין כדף חלק המשתרע ללא גבול בכל הכיוונים.

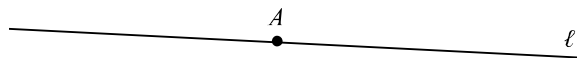
אחת הדרכים לחשוב על המישור היא המישור הקרטזי, המתקבל כאשר בוחרים מערכת צירים, וכפי שלמדנו בעבר, נקודותיו מיוצגות על ידי זוגות של מספרים ממשיים; אך מושג המישור הוא קדום למישור הקרטזי ופשוט ממנו.

אחד האובייקטים היסודיים במישור הוא **הנקודה**. נוכל לצייר נקודה על פני הדף בקצה העט או העיפרון; אך למעשה נצייר מעגל קטן שגודלו כגודל חודו של מכשיר הכתיבה. הנקודה הגיאומטרית היא חסרת מימדים והיא בעצם אובייקט מופשט, אידיאליזציה של מושג מציאותי קונקרטי.

אובייקט יסודי נוסף הוא **הישר**: קו רצוף ללא עיקומים ופיתולים, המשתרע ללא גבול לשני כיוונים ואינו בעל עובי. גם הישר הוא אידיאליזציה של קו ישר שנוכל לצייר בעזרת סרגל וכלי כתיבה.



כל ישר, וגם המישור כולו, הוא קבוצה של נקודות. בדרך כלל נסמן נקודות על ידי אותיות לטיניות גדולות: A, B, C וכן הלאה. בדרך כלל נסמן ישרים על ידי אותיות לטיניות קטנות, ובמיוחד על ידי האות ℓ . במצב שבו נקודה A שייכת לישר ℓ , נאמר שהנקודה A **חלה** על הישר ℓ , או **נמצאת** על הישר. נאמר גם שהישר ℓ **עובר** דרך הנקודה A .



כאשר נקודה A נמצאת על שני ישרים, ℓ_1 ו- ℓ_2 , נאמר שהישרים **נחתכים** בנקודה A , או **נפגשים** בנקודה זו.

זוג ישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 שאינם נחתכים באף נקודה נקראים **זוג ישרים מקבילים**. נסמן זאת כך: $\ell_1 \parallel \ell_2$.

התכונות הבאות של ישרים ונקודות הן חלק מהאקסיומות של הגיאומטריה:

8.1 אקסיומה

בהינתן זוג ישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 , תיתכנה שלוש אפשרויות:

א. הישרים מתלכדים: $\ell_1 = \ell_2$.

ב. הישרים מקבילים: $\ell_1 \parallel \ell_2$.

ג. הישרים נחתכים בנקודה אחת בדיוק.

מצבים אלה מוצגים באיור הבא:



8.2 אקסיומה

בהינתן שתי נקודות שונות זו מזו, A ו- B , קיים קו ישר אחד ויחיד העובר דרך שתיהן.

בניסוח שגור: "דרך שתי נקודות עובר רק קו ישר אחד".

מצב זה מודגם באיור הבא:

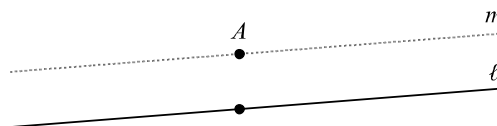


מכיוון שהקו הישר העובר דרך A ו- B נקבע ביחידות, מקובל לסמן ישר זה כך: AB . בדרך כלל נכתוב במפורש "הישר AB " כדי למנוע בלבול עם מונחים נוספים המסומנים בסימון זה.

8.3 אקסיומה (אקסיומת המקבילים)

בהינתן ישר ℓ ונקודה A שאינה על הישר, קיים ישר יחיד m העובר דרך הנקודה A ומקביל לישר ℓ .

מצב זה מוצג באיור הבא:



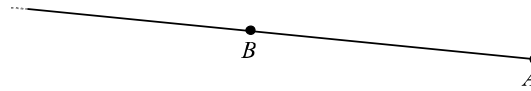
קרניים וקטעים

בהינתן ישר ℓ ונקודה A עליו, הנקודה A מחלקת את הישר לשני חלקים. כל חלק נקרא **קרן**. הנקודה A נקראת **נקודת ההתחלה** של כל קרן כזו, ונאמר גם שהקרן **יוצאת** מהנקודה A .

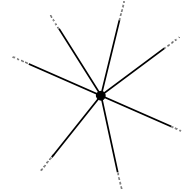
קרן נראית אפוא כך:



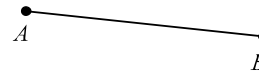
דרך מקובלת לציין קרן היא על ידי נקודת ההתחלה שלה, A , ונקודה נוספת על הקרן, B . קרן זו מסומנת כך: $\overrightarrow{AB}$, והיא נקראת **הקרן היוצאת מהנקודה A בכיוון הנקודה B** . קרן זו היא כמובן חלק מהישר AB .



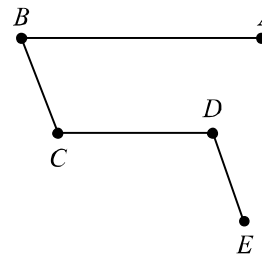
באיור הבא מוצגות מספר קרניים היוצאות מנקודה אחת:



בהינתן שתי נקודות שונות זו מזו, A ו- B , אוסף הנקודות שעל הישר AB הנמצאות בין הנקודות A ו- B נקרא **קטע**. קטע זה מסומן על ידי AB . כדי להבחין בינו ובין הישר AB , נציין מפורשות: הקטע AB .



כל קרן, וגם כל קטע, מונחים על ישר אחד ויחיד. נאמר על זוג קטעים, או על זוג קרניים שהם מקבילים זה לזה אם הישרים שעליהם הם מונחים הם מקבילים. לדוגמה:



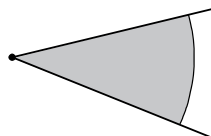
באיור זה מתקיים $AB \parallel CD$ ו- $BC \parallel DE$. אך שימו לב: הקטעים AB ו- DE שבאיור אינם מקבילים, למרות שאינם נחתכים. הם אינם מקבילים כי הישרים שהם מונחים עליהם נחתכים. תוכלו להיווכח בכך אם תמשיכו את הקטע DE מעבר לנקודה D , עד לפגישה עם הקטע AB .

אורך ומרחק

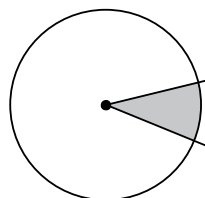
בדומה למרחקים שמדדנו על הישר הממשי, נוכל למדוד מרחקים במישור. אנו מניחים את קיומה של יחידת מידה. לפי יחידת מידה זו, מוגדר האורך של כל קטע AB , והוא מספר ממשי חיובי. אורך זה מסומן כך: $\overline{AB}$. אורך זה נקרא גם **המרחק** בין הנקודה A והנקודה B .

זוויות

תחום במישור המוגבל על ידי שתי קרניים היוצאות מנקודה אחת נקרא **זווית**. הנקודה המשותפת לשתי הקרניים נקראת **קודקוד הזווית**.



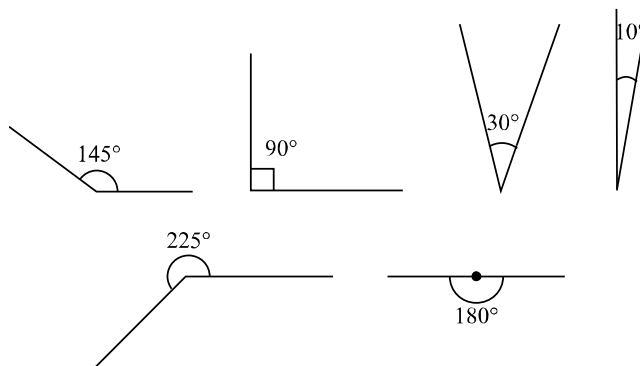
אם נסמן מעגל ברדיוס כלשהו סביב הקודקוד, תקרוץ הזווית חלק מן המעגל, כמודגם באיור:



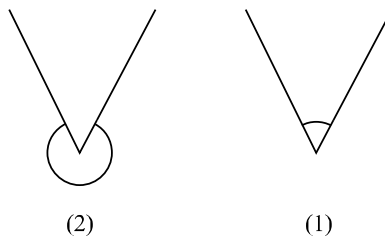
באופן זה נייחס לזוויות ערך מספרי, שהוא מספר ממשי. היחידה שנכיר למדידת זוויות היא **מעלה**, המסומנת על ידי העיגול $^{\circ}$. בהמשך נכיר יחידה נוספת.

בסימון במעלות, המעגל השלם מתאים לזווית של 360° (קרי: 360 מעלות), ושאר הזוויות מוגדרות באופן פרופורציונלי: זווית של חצי מעגל היא זווית של 180° , זווית של רבע מעגל היא זווית של 90° , וזווית של 1° היא זווית של $1/360$ מהמעגל.

באיור הבא מוצגות כמה זוויות וערכיהן המספריים.



נשים לב שזוג קרניים היוצא מנקודה אחת יכול להגדיר שתי זוויות שונות, וכשאנו מתייחסים לזווית המוגדרת על ידי זוג הקרניים, חשוב להבהיר לאיזו מהן אנו מתכוונים. נתבונן, למשל, באיור הבא:

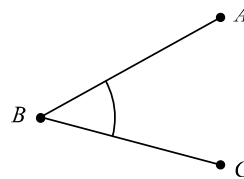


אותו זוג קרניים כולא שתי זוויות, המשלימות זו את זו ל- 360° . האחת, (1), קטנה מ- 180° והשנייה, (2), גדולה מ- 180° .

כדי למנוע את הצורך להבהיר בכל פעם מהי הזווית שאליה נתכוון, נסכים שכל עוד לא הוצהר אחרת, זוויות הן תמיד בין 0° ל- 180° . כך נקבעת מידתה של הזווית באופן יחיד.

אחת הדרכים המקובלות לסמן זוויות היא על ידי ציון של שלוש נקודות: אחת מהן היא קודקוד הזווית, והשתיים האחרות הן נקודות על כל אחת מקרניה של הזווית. מיקומו של קודקוד הזווית בכתיבה זו הוא בין שתי הנקודות האחרות.

באיור הבא מצינת הזווית $\angle ABC$:

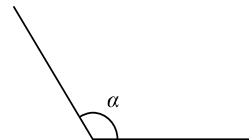


קודקוד הזווית הוא B , וקרני הזווית הן $\overrightarrow{BA}$ ו- $\overrightarrow{BC}$.

במקרה זה גודל הזווית הוא: $\angle ABC = 45^\circ$.

הקטעים BA ו- BC נקראים **שוקי הזווית** $\angle ABC$.

דרך נוספת לציון זוויות היא על ידי אותיות יווניות קטנות, ובמיוחד: α (אלפא), β (בטא), γ (גמא), δ (דלתא). לדוגמה:



הזווית α שבאיור זה מקיימת $\alpha = 120^\circ$.

סוגי זוויות

תהי $0 < \alpha \leq 180^\circ$ זווית.

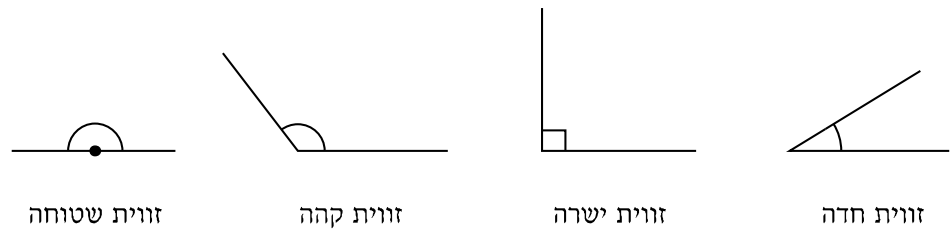
אם $\alpha < 90^\circ$ אז α נקראת **זווית חדה**.

אם $\alpha = 90^\circ$ אז α נקראת **זווית ישרה**.

אם $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ אז α נקראת **זווית קהה**.

אם $\alpha = 180^\circ$ אז α נקראת **זווית שטוחה**.

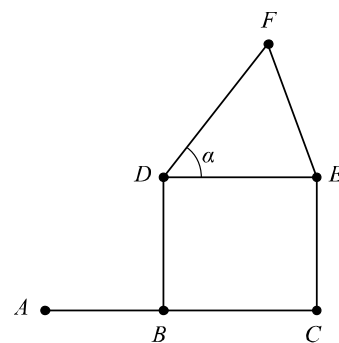
באיור הבא מוצגים סוגי הזוויות השונים:



שימו לב לסימון המיוחד עבור זווית ישרה.

שאלה 1

מצאו את גודל הזוויות שבאיור הבא (באופן משוערך או במדויק אם יש ברשותכם מד-זווית). ציינו לגבי כל זווית אם היא חדה, ישרה, קהה או שטוחה.

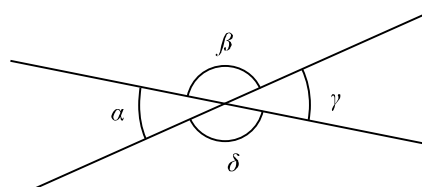


- א. $\angle ABD$
- ב. $\angle FED$
- ג. $\angle DEF$
- ד. $\angle ABC$
- ה. α
- ו. $\angle DFE$
- ז. $\angle BDF$
- ח. $\angle FEC$

התשובה בעמוד 286

זוויות קודקודיות ומשלמות

נתבונן בזוג ישרים הנחתכים בנקודה אחת, ובזוויות הנוצרות ביניהם:



הזוויות α ו- β יוצרות ביחד זווית שטוחה. לכן: $\alpha + \beta = 180^\circ$

במצב זה נאמר ש- α ו- β הן **זוויות משלמות**.

באופן דומה, β ו- γ הן זוויות משלמות, וכמותן גם γ ו- δ , וגם α ו- δ .

כעת נתבונן בזוויות α ו- γ . זוויות אלה נמצאות זו מול זו משני עברי נקודת החיתוך של הישרים. במצב זה נאמר שהזוויות הן **קודקודיות** זו לזו.

משפט 8.4

זוויות קודקודיות הן שוות זו לזו.

הוכחה

נתבונן בזוויות שבאיור בעמוד הקודם. נוכיח ש' $\alpha = \gamma$.

α ו' β הן זוויות משלימות, ולכן: $\alpha + \beta = 180^\circ$

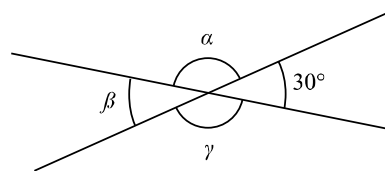
β ו' γ הן זוויות משלימות, ולכן: $\beta + \gamma = 180^\circ$

מכאן: $\alpha = 180^\circ - \beta = \gamma$ □

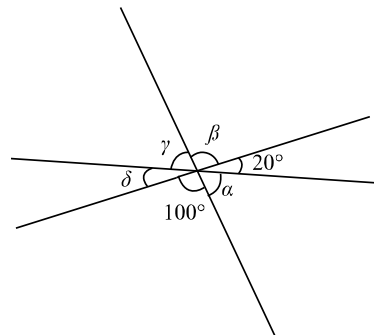
באיור שבעמוד הקודם, גם β ו' δ הן זוויות קודקודיות, ולכן $\beta = \delta$.

שאלה 2

א. מצאו את הזוויות α, β, γ באיור:



ב. מצאו את הזוויות $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ באיור:



התשובה בעמוד 286

זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים

את המשפט הבא לא נוכיח:

משפט 8.5

שני ישרים, המקבילים לישר שלישי, הם זהים או מקבילים.

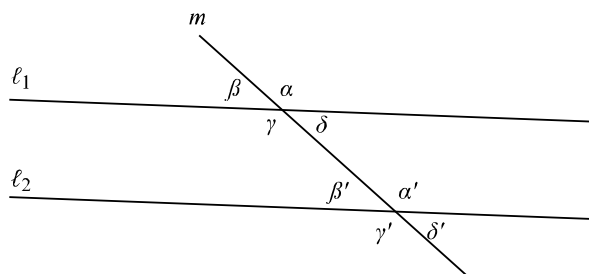
בניסוח אחר: אם ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 הם ישרים, $\ell_1 \parallel \ell_3$ ו' $\ell_2 \parallel \ell_3$, אז $\ell_1 \parallel \ell_2$ או $\ell_1 = \ell_2$.

8.6 מסקנה

בהינתן שני ישרים מקבילים $\ell_1 \parallel \ell_2$, כל ישר הנחתך עם ℓ_1 נחתך גם עם ℓ_2 .

מסקנה זו היא מיידיית, כי אם הישר לא היה נחתך עם ℓ_2 , הוא היה מקביל ל- ℓ_2 , ולפי משפט 8.5 הוא היה מקביל גם ל- ℓ_1 , בסתירה להנחה.

נתבונן עתה במצב שבו יש שני ישרים מקבילים, $\ell_1 \parallel \ell_2$, וישר שלישי, m , הנחתך עם שניהם:



במצב זה, סביב כל נקודת חיתוך נוצרות 4 זוויות, כמתואר באיור. יש התאמה בין רביעיית הזוויות $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ לרביעיית הזוויות $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$:

הזוויות α ו- α' נקראות זוויות מתאימות;
 הזוויות β ו- β' נקראות זוויות מתאימות;
 הזוויות γ ו- γ' נקראות זוויות מתאימות;
 הזוויות δ ו- δ' נקראות זוויות מתאימות.

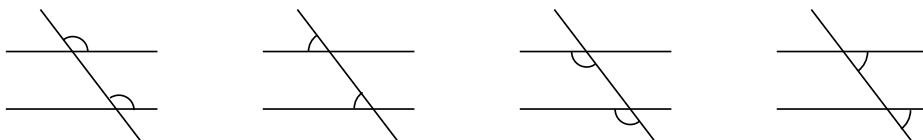
8.7 משפט

זוויות מתאימות הנוצרות בין שני ישרים מקבילים הן שוות זו לזו.

לא נוכיח את המשפט.

לאור המשפט, מתקיים: $\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma', \delta = \delta'$

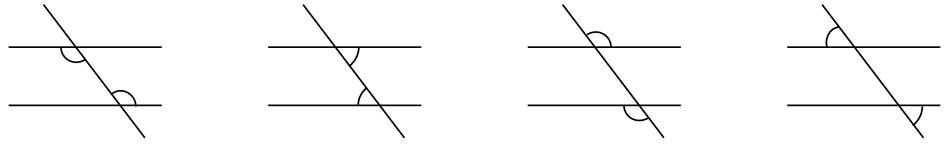
לסיכום, בדיאגרמה הבאה מוצגים כל הזוגות של זוויות מתאימות בין ישרים מקבילים:



בכל הזוגות האלה, שתי הזוויות נמצאות מאותו צד של הישר החותך, ומאותו צד (למעלה/למטה) של הישרים המקבילים.

זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים

נתבונן עתה בזוגות הבאים של הזוויות הנוצרות בין שני ישרים מקבילים וישר חותך:

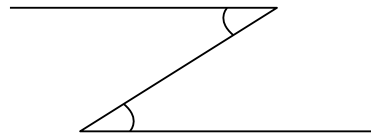


בכל הזוגות, שתי הזוויות נמצאות בצדדים מנוגדים של הישר החותך, ובצדדים מנוגדים של הישרים המקבילים. הזוויות שבזוגות אלה נקראות **זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים**. נשים לב שבזוג זוויות מתחלפות, זווית אחת היא קודקודית לזווית שמתאימה לזווית השנייה. משילוב המשפטים 8.4 ו-8.7 נקבל:

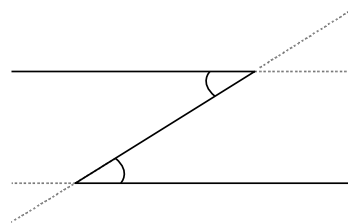
משפט 8.8

זוויות מתחלפות הנוצרות בין שני ישרים מקבילים הן שוות זו לזו.

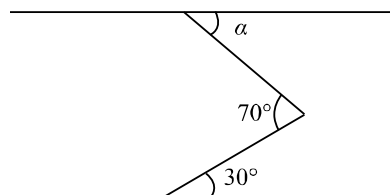
לדוגמה, נתבונן באיור הבא:



אם נתון כי הקטע העליון מקביל לקטע התחתון אז הזוויות המסומנות שוות זו לזו, כי הן זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים. קל לראות זאת כשמאריכים את הקווים שבאיור:

**שאלה 3**

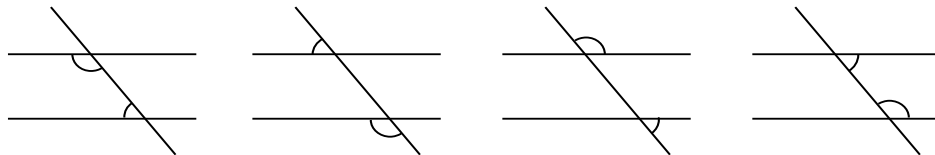
מצאו את הזווית α באיור, אם נתון שהישר העליון מקביל לישר התחתון:



הדרכה: העבירו ישר מקביל לישר העליון והתחתון דרך קודקוד הזווית שגודלה 70° .

זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים

כעת נתבונן בזוגות של זוויות הנמצאות מאותו צד של הישר החותך, אך מצדדים שונים של הישרים המקבילים:



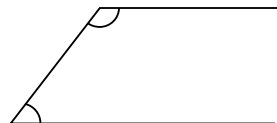
הזוויות שבזוגות אלה נקראות **זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים**.

נשים לב שבזוג זוויות חד-צדדיות, זווית אחת היא זווית משלימה לזווית שמתאימה לזווית השנייה. ממשפט 8.7 נקבל:

משפט 8.9

הסכום של שתי זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים הוא 180° .

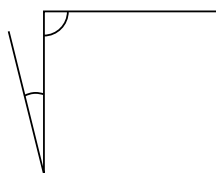
לדוגמה, נתבונן באיור הבא:



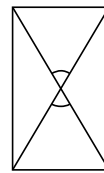
אם נתון כי הקטע העליון מקביל לקטע התחתון אז סכום הזוויות המסומנות הוא 180° , כי הן זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים.

שאלה 4

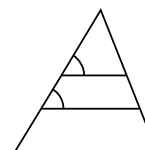
בכל אחד מהאיורים קבעו אם הזוויות המסומנות הן קודקודיות, משלימות, מתאימות, מתחלפות, חד-צדדיות, או שאין ביניהן יחס מסוגים אלה.



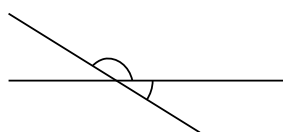
(ג)



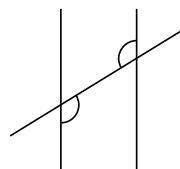
(ב)



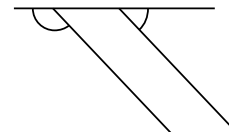
(א)



(ו)

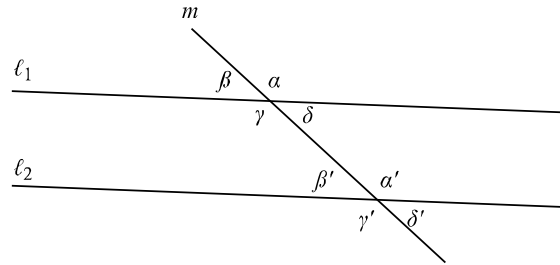


(ה)



(ד)

ראינו אפוא כי בהינתן זוג ישרים מקבילים, וישר החותך אותן, מתקבלים שוויונות בין זוויות הנוצרות בין הישר החותך לישרים המקבילים. ניתן להוכיח גם משפטים הפוכים, המבטיחים ששני ישרים יהיו מקבילים, בהינתן שוויון של זוויות. נתבונן במצב הבא:



הפעם, ℓ_1 ו- ℓ_2 הם שני ישרים (לא נתון שהם מקבילים), ו- m הוא ישר החותך את שני הישרים.

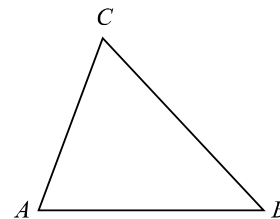
משפט 8.10

אם מתקיים שוויון של זוויות מתאימות (למשל: $\alpha = \alpha'$) או שוויון של זוויות מתחלפות (למשל: $\alpha = \gamma'$) או שסכום של זוויות חד-צדדיות הוא 180° (למשל: $\alpha + \delta' = 180^\circ$), אז $\ell_1 \parallel \ell_2$ או $\ell_1 = \ell_2$.

לא נוכיח את המשפט.

המשולש

נתבונן במצב שבו נתונות 3 נקודות במישור, שאינן על ישר אחד: A, B, C . נחבר את הנקודות זו לזו על ידי קטעים. בדרך זו נקבל את הצורה הנקראת **משולש**.



משולש זה מסומן כך: $\triangle ABC$.

הנקודות A, B, C נקראות **קודקודי המשולש**.

הקטעים AB, AC, BC נקראים **צלעות המשולש**.

נסמן את הצלע BC שמול הקודקוד A באות a .

נסמן את הצלע AC שמול הקודקוד B באות b .

נסמן את הצלע AB שמול הקודקוד C באות c .

הסימנים a, b, c מציינים את צלעות המשולש וגם את האורכים של צלעות אלה.

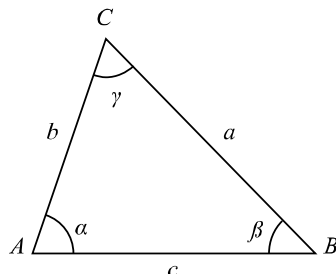
הזוויות $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ נקראות **זוויות המשולש**.

נסמן את הזווית $\angle BAC$ על ידי קודקודה: $\angle A$, או על ידי האות α .

נסמן את הזווית $\angle ABC$ על ידי קודקודה: $\angle B$, או על ידי האות β .

נסמן את הזווית $\angle ACB$ על ידי קודקודה: $\angle C$, או על ידי האות γ .

הסימנים $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$ מציינים את זוויות המשולש וגם את הגדלים של זוויות אלה.



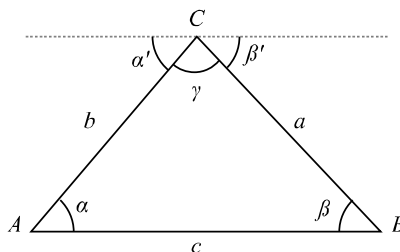
הצלעות והזוויות מסומנות, אפוא, כך:

משפט 8.11

סכום הזוויות בכל משולש הוא 180° .

הוכחה

נתבונן במשולש $\triangle ABC$. נעביר דרך הקודקוד C ישר מקביל לצלע AB :



נתבונן בזוויות α' , β' שבין צלעות המשולש לישר המקביל.

זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים, הן מקיימות:

$$\alpha' = \alpha, \beta' = \beta$$

הזוויות α' , γ , β' ממלאות ביחד זווית שטוחה. לכן:

$$\alpha' + \gamma + \beta' = 180^\circ$$

נציב את ערכי α' ו- β' :

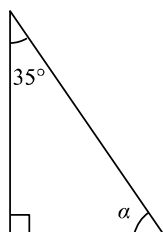
$$\alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$$

לכן $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, כפי שרצינו להוכיח.

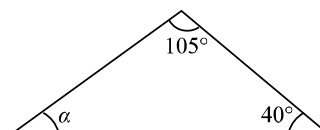
□

שאלה 5

מצאו את הזווית α בכל אחד מהאיורים הבאים:



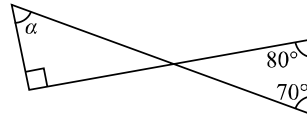
(ב)



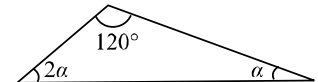
(א)

התשובה בעמוד 287

התשובה בעמוד 287



(ד)



(ג)

שאלה 6

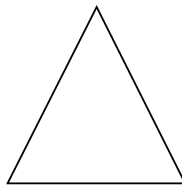
הוכיחו שבכל משולש יש לכל היותר זווית אחת שהיא קהה או ישרה.

למשולש שיש בו זווית קהה קוראים **משולש קהה-זווית**.

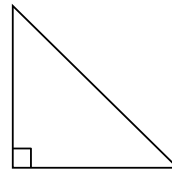
למשולש שיש בו זווית ישרה קוראים **משולש ישר-זווית**.

למשולש שכל זוויותיו חדות קוראים **משולש חד-זווית**.

לאור האמור בשאלה 6, למשולש קהה-זווית יש זווית קהה אחת, ושאר זוויותיו הן חדות; למשולש ישר-זווית יש זווית ישרה אחת, ושאר זוויותיו הן חדות.



משולש חד-זווית



משולש ישר-זווית



משולש קהה-זווית

תכונה יסודית נוספת של משולשים היא **אי-שוויון המשולש**.

משפט 8.12 (אי-שוויון המשולש)

האורך של כל צלע במשולש קטן מסכום אורכי הצלעות האחרות.

משמעות המשפט היא שבהינתן משולש שאורכי צלעותיו הן a , b ו- c , מתקיימים האי-שוויונות הבאים:

$$\begin{cases} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{cases}$$

יתרה מכך, מתקיים גם משפט הפוך:

משפט 8.13

אם a , b ו- c הם מספרים ממשיים חיוביים שכל אחד מהם קטן מסכום שני האחרים, אז ניתן לבנות משולש שאורכי צלעותיו הם a , b ו- c .

לא נוכיח את המשפטים האלה.

מצולעים

נניח ש- $n \geq 3$ הוא מספר טבעי, ונניח שנתונות n נקודות במישור:

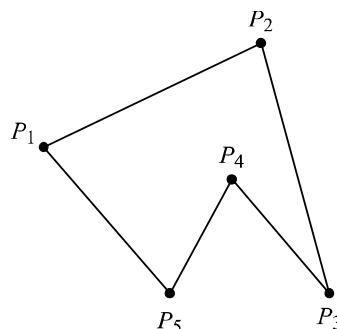
$$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$$

$$P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$$

נתבונן בקטעים הבאים:

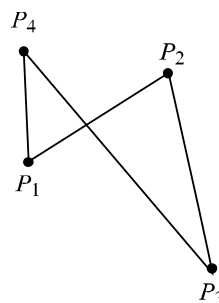
באופן זה קיבלנו קו סגור במישור.

לדוגמה, עבור $n = 5$, נתבונן בנקודות P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 , ובקטעים המחברים כל נקודה לנקודה הבאה אחריה (באופן מעגלי, כלומר, לרבות חיבור הנקודה האחרונה לראשונה):

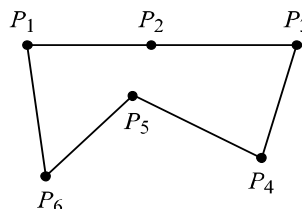


הצורה המתקבלת נקראת **מצולע** אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. הקטעים שתוארו לעיל לא נחתכים זה עם זה (למעט בנקודות $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$).
לדוגמה, לא מתקיים המצב הבא:



ב. כל שלוש נקודות עוקבות ברשימה (לרבות באופן מעגלי) לא נמצאות על ישר אחד.
לדוגמה, לא מתקיים המצב הבא:



הנקודות $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ נקראות **קודקודי המצולע**.

הקטעים $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$ נקראים **צלעות המצולע**.

הזוויות: $\sphericalangle P_1 = \sphericalangle P_n P_1 P_2$

$$\sphericalangle P_2 = \sphericalangle P_1 P_2 P_3$$

$\vdots$

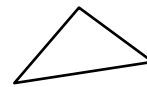
$$\sphericalangle P_{n-1} = \sphericalangle P_{n-2} P_{n-1} P_n$$

$$\sphericalangle P_n = \sphericalangle P_{n-1} P_n P_1$$

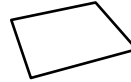
נקראות זוויות המצולע.

לפיכך, בכל מצולע מתקיים: מספר הקודקודים = מספר הצלעות = מספר הזוויות.

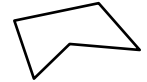
להלן כמה דוגמאות למצולעים:



א. מצולע בעל 3 צלעות נקרא **משולש**:



ב. מצולע בעל 4 צלעות נקרא **מרובע**:

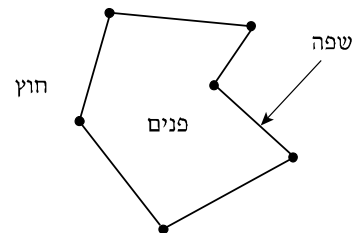


ג. מצולע בעל 5 צלעות נקרא **מחומש**:

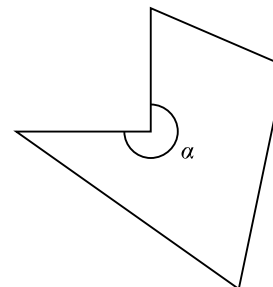


ד. מצולע בעל 6 צלעות נקרא **משושה**:

כל מצולע מחלק את המישור לשלושה חלקים: פנים המצולע, שפת המצולע, ומה שמחוץ למצולע. שפת המצולע היא האיחוד של צלעות המצולע.

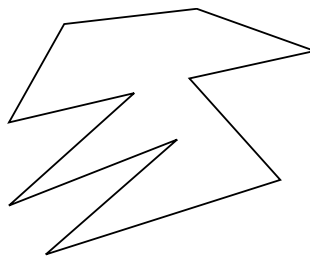


את זוויות המצולע נמדוד לפי חלקן הפנימי, הנמצא בתוך המצולע. הגדרה זו מאפשרת לזווית להיות גדולה מ- 180° . לדוגמה, הזווית α שבאיור שווה ל- 270° :



שאלה 7

סמנו את זוויות המצולע באיור הבא:



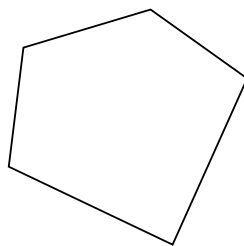
התשובה בעמוד 288

מצולע שכל זוויותיו קטנות מ- 180° נקרא **מצולע קמור**. המשפט הבא (שיובא ללא הוכחה) מאפיין מצולעים קמורים באופן אחר:

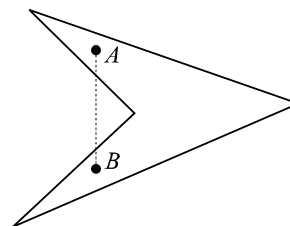
משפט 8.14

מצולע הוא קמור אם ורק אם לכל שתי נקודות במצולע, הקטע המחבר ביניהן נמצא במצולע.

לדוגמה, המצולע שבאיור מימין אינו קמור, כי הקטע המחבר בין הנקודות A ו- B שבמצולע אינו נמצא כולו בתוך המצולע. המצולע שבאיור משמאל הוא קמור.



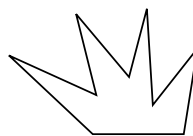
מצולע קמור



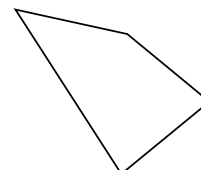
מצולע לא קמור

שאלה 8

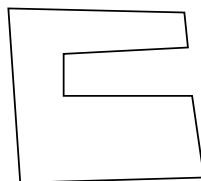
קבעו לגבי כל מצולע אם הוא קמור או לא, ואם אינו קמור, הראו זאת בעזרת קטע מתאים.



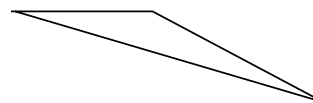
(ב)



(א)



(ד)



(ג)

התשובה בעמוד 288

גם את המשפט הבא לא נוכיח:

משפט 8.15

כל המשולשים הם קמורים.

סכום הזוויות במצולע קמור

במשפט 8.11 הוכחנו שסכום הזוויות במשולש הוא 180° . נשתמש בידיעה זו כדי לחשב את סכום הזוויות במצולע קמור כלשהו:

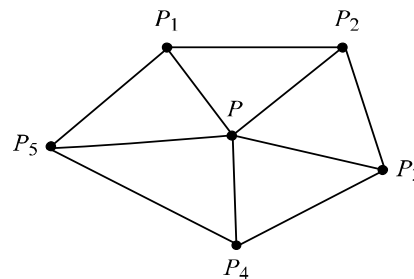
משפט 8.16

סכום הזוויות במצולע קמור בעל n צלעות הוא $180(n - 2)$ מעלות.

הוכחה

נסמן את קודקודי המצולע ב- $P_1, P_2, \dots, P_n$ (באיור שלהלן מודגם עם $n = 5$).
נסמן את סכום זוויות המצולע ב- S .

תהי P נקודה כלשהי בפנים המצולע. נחבר את הנקודה P אל כל קודקודי המצולע על ידי קטעים ישרים. מכיוון שהמצולע קמור, קטעים אלה נמצאים בתוך המצולע.
בדרך זו חילקנו את המצולע ל- n משולשים:



כעת נחשב את סכום הזוויות של כל המשולשים, בשתי דרכים.

דרך ראשונה: יש n משולשים, ובכל אחד מהם, סכום הזוויות הוא 180° . לכן סכום הזוויות של כל המשולשים הוא $180n$ מעלות.

דרך שנייה: הזוויות שמסביב לנקודה P מכסות מעגל שלם ולכן סכומן הוא 360° . שאר הזוויות מתחלקות לזוגות, שתי זוויות ליד כל קודקוד P_i , והסכום של כל זוג שווה לזווית המצולע הקמור שקודקודה הוא P_i . לכן סכום הזוויות של כל המשולשים הוא $S + 360$ מעלות.

בשתי הדרכים מחושב אותו הסכום, ולכן מתקבל השוויון $S + 360 = 180n$

מכאן: $S = 180n - 360 = 180n - 180 \cdot 2 = 180(n - 2)$ □

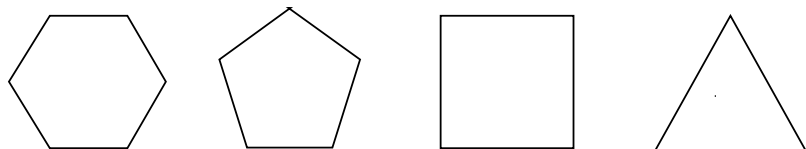
מהמשפט האחרון נובע, בפרט:

- בהצבה $n = 4$: סכום הזוויות בכל מרובע הוא $180 \cdot 2 = 360^\circ$.
- בהצבה $n = 5$: סכום הזוויות בכל מחומש הוא $180 \cdot 3 = 540^\circ$.
- בהצבה $n = 6$: סכום הזוויות בכל משושה הוא $180 \cdot 4 = 720^\circ$.

מצולעים משוכללים

מצולע אשר כל צלעותיו שוות זו לזו, וכל זוויותיו שוות זו לזו, נקרא **מצולע משוכלל**. ניתן להוכיח שמצולע כזה הוא קמור.

באיור הבא מוצגים מצולעים משוכללים בעלי 3, 4, 5 ו-6 צלעות:



משושה משוכלל

מחומש משוכלל

מרובע משוכלל

משולש משוכלל

לפי משפט 8.16, נוכל לחשב את גודל הזוויות במצולע משוכלל בעל n צלעות.

כאמור שם, סכום הזוויות במצולע הוא $180^\circ(n - 2)$.

כל הזוויות במצולע שוות זו לזו. נסמן את גודלן ב- α , ונקבל: $n\alpha = 180^\circ(n - 2)$

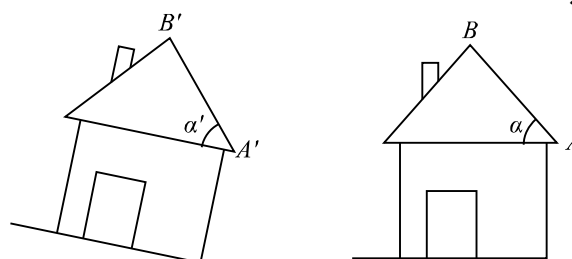
$$\Rightarrow \alpha = \frac{180^\circ(n - 2)}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

בפרט נקבל:

- בהצבה $n = 3$: גודל הזוויות במשולש משוכלל הוא $180 - \frac{360}{3} = 60^\circ$.
- בהצבה $n = 4$: גודל הזוויות במרובע משוכלל הוא $180 - \frac{360}{4} = 90^\circ$.
- בהצבה $n = 5$: גודל הזוויות במחומש משוכלל הוא $180 - \frac{360}{5} = 108^\circ$.
- בהצבה $n = 6$: גודל הזוויות במשושה משוכלל הוא $180 - \frac{360}{6} = 120^\circ$.

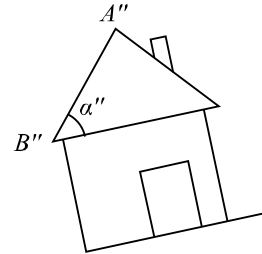
חפיפה – מבוא אינטואיטיבי

נתבונן בזוג הצורות הבאות:



צורה אחת מתקבלת מרעותה על ידי הזזה וסיבוב. לכן יש התאמה חח"ע ועל בין נקודות צורה אחת לנקודות הצורה השנייה. התאמה זו משמרת מרחקים: המרחק בין שתי נקודות בצורה האחת שווה למרחק בין שתי הנקודות המתאימות להן בצורה השנייה. לכן $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. התאמה זו משמרת גם זוויות, ולמשל α באיור הימני שווה בגודלה לזווית α' שבאיור השמאלי, המתאימה לה.

כעת נתבונן בצורה הבאה:



צורה זו מתקבלת מהצורות הקודמות על ידי שיקוף (המייצר תמונת מראה של הצורה), הזזה וסיבוב. נקודותיה נמצאות, כמו במקרה הקודם, בהתאמה חח"ע ועל עם כל אחת מהצורות הקודמות, באופן המשמר מרחקים וזוויות. בפרט, $\overline{AB} = \overline{A''B''}$ ו- $\alpha = \alpha''$.

באופן בלתי פורמלי, נאמר ששתי צורות הן **חופפות** אם ניתן לשרטט את אחת הצורות על נייר שקוף, ולהניח אותו על גבי הצורה השנייה, כך שתתקבל התאמה מדויקת. הגדרה זו כוללת את האפשרות להפוך את הנייר השקוף, כך שתתקבל תמונת מראה של הצורה המקורית.

מושג החפיפה הוא מקרה פרטי של מושג כללי במתמטיקה הנקרא **איזומורפיזם** שמשמעותו שוויון צורה. מושג האיזומורפיזם לא מוגבל לצורות גיאומטריות אלא מתייחס גם למבנים מתמטיים אבסטרקטיים, כגון קבוצות של מספרים ופעולות ביניהם. החפיפה הגיאומטרית נקראת גם **איזומטריה**, מילה שמשמעותה היא שוויון מרחק. כפי שראינו, בצורות חופפות נשמרים המרחקים שבין זוגות נקודות מתאימות.

חפיפת מצולעים

נעבור להגדרת מושג החפיפה במצולעים, באופן פורמלי ומדויק.

בהינתן שני מצולעים שקודקדיהם (על פי סדרם) הם $P_1, P_2, \dots, P_n$ ו- $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, נאמר שהמצולעים **חופפים** אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. אורכי הצלעות המתאימות שווים, כלומר:

$$\overline{P_1P_2} = \overline{Q_1Q_2}, \overline{P_2P_3} = \overline{Q_2Q_3}, \dots, \overline{P_nP_1} = \overline{Q_nQ_1}$$

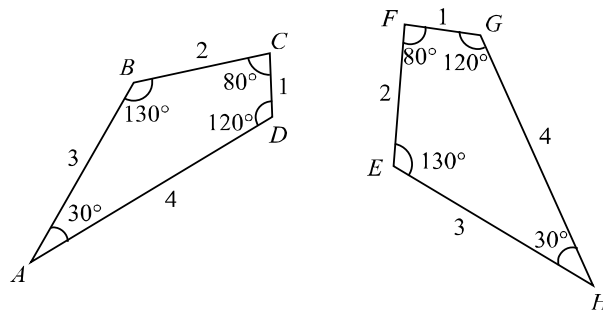
ב. גודלי הזוויות המתאימות שווים, כלומר:

$$\sphericalangle P_1 = \sphericalangle Q_1, \sphericalangle P_2 = \sphericalangle Q_2, \dots, \sphericalangle P_n = \sphericalangle Q_n$$

נסמן זאת כך: $P_1P_2 \dots P_n \cong Q_1Q_2 \dots Q_n$.

בהגדרת החפיפה, יש חשיבות לסדר שבו רושמים את קודקודי המצולעים. משמעות הרישום $P_1 P_2 \dots P_n \cong Q_1 Q_2 \dots Q_n$ היא שהקודקוד P_1 מתאים לקודקוד Q_1 , הקודקוד P_2 מתאים לקודקוד Q_2 , וכן הלאה. מכאן נגררות התאמה בין צלעות המצולע האחד לצלעות המצולע השני, והתאמה בין זוויות המצולע האחד לזוויות המצולע השני.

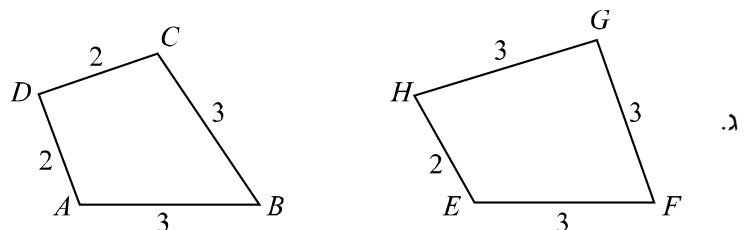
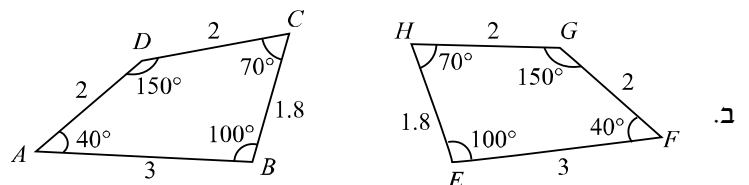
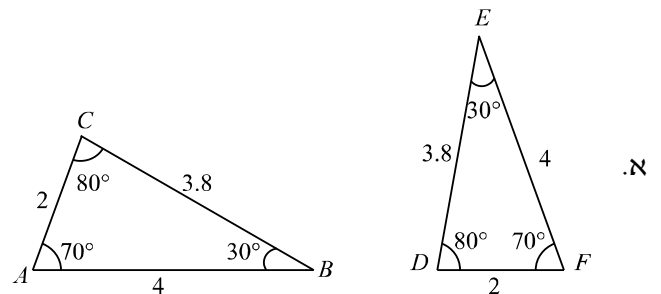
לדוגמה, נתבונן באיור:



באיור זה מוצגים שני מרובעים חופפים. סדר הקודקודים בחפיפה הוא: $ABCD \cong HEFG$.

שאלה 9

בכל אחד מהסעיפים, קבעו אם זוג המצולעים הוא חופף. במידה וכן, כתבו את סדר הקודקודים בחפיפה.



התשובה בעמוד 288

חפיפת משולשים

בהינתן זוג משולשים, המשולשים הם חופפים אם ניתן לבחור סדר עבור קודקודי המשולש הראשון: A, B, C וסדר עבור קודקודי המשולש השני: A', B', C' , כך שמתקיימים השוויונות הבאים:

◁ לפי ההגדרה הכללית של חפיפת מצולעים

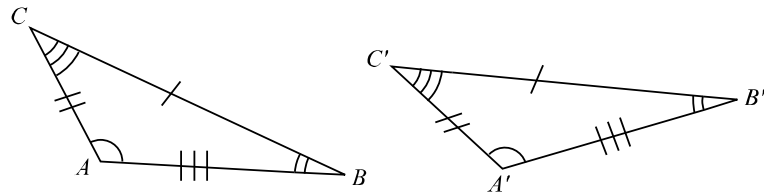
א. שוויון בין הצלעות המתאימות: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$
 ב. שוויון בין הזוויות המתאימות: $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$

באופן מפורט יותר, שוויון הזוויות נכתב כך:

$$\angle BAC = \angle B'A'C', \angle ABC = \angle A'B'C', \angle ACB = \angle A'C'B'$$

במצב זה נסמן: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. סימון זה מבטא את חפיפת המשולשים, ביחס לסדר הקודקודים הרשום בו.

◁ סימוני הקווים שעל הצלעות ועל הזוויות באיור נועדו להדגיש את השוויונות הנדרשים בין הזוויות ובין הצלעות של שני המשולשים.



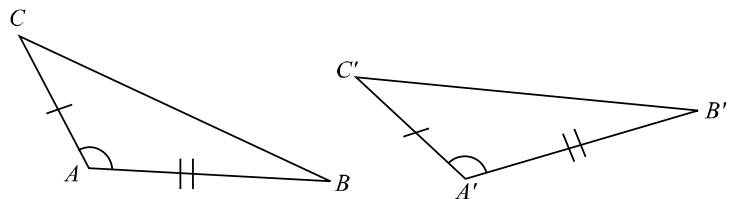
לחפיפת משולשים נדרשים אפוא שישה שוויונות: שלושה שוויונות בין אורכי צלעות, ושלושה שוויונות בין גודלי זוויות. אך מתברר שניתן להסתפק בפחות. משפטים שונים הנקראים **משפטי חפיפה** מבטיחים חפיפה של משולשים על סמך שלושה שוויונות בלבד. משפטים אלה הם שימושיים להפליא בהוכחה של טענות בגיאומטריה. נציג אותם כעת, ללא הוכחה:

משפט 8.17 (משפט החפיפה הראשון)

שני משולשים, השווים באורכי שתי צלעות, ובזווית הכלואה ביניהן, הם חופפים.

באופן מפורט, ננסח משפט זה כך:

יהיו $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ שני משולשים. אם $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ו- $\angle BAC = \angle B'A'C'$ אז $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



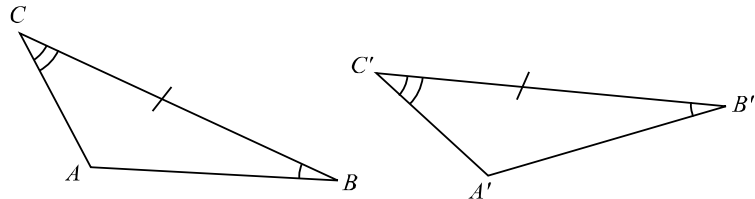
משפט זה נקרא, מסיבות מובנות, 'משפט החפיפה צלע-זווית-צלע' ומסומן בקיצור: צ.ז.צ.

משפט 8.18 (משפט החפיפה השני)

שני משולשים, השווים בגודלי שתי זוויות, ובאורך הצלע שביניהן, הם חופפים.

בניסוח מפורט:

יהיו $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ שני משולשים. אם $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\angle ACB = \angle A'C'B'$, ו- $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ אז $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



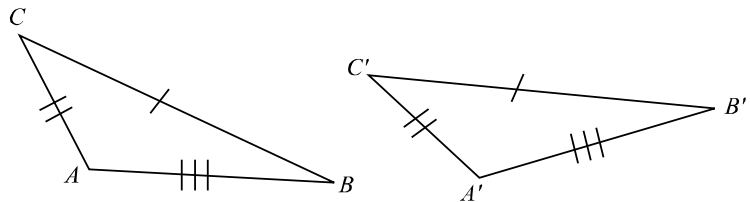
משפט זה נקרא 'משפט החפיפה זווית-צלע-זווית' ומסומן בקיצור: ז.צ.ז.

משפט 8.19 (משפט החפיפה השלישי)

שני משולשים השווים באורכי צלעותיהם הם חופפים.

בניסוח מפורט:

יהיו $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ שני משולשים. אם $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, ו- $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ אז $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



משפט זה נקרא 'משפט החפיפה צלע-צלע-צלע' ומסומן בקיצור: צ.צ.צ.

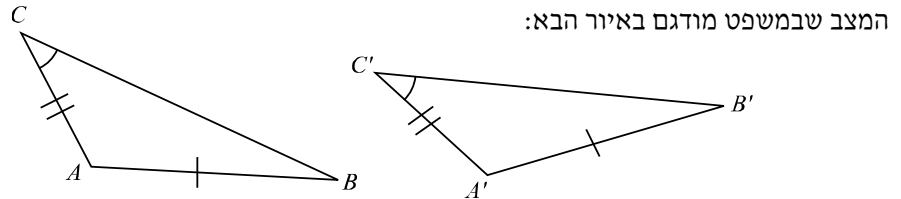
משפט החפיפה האחרון הוא מעט מורכב יותר:

משפט 8.20 (משפט החפיפה הרביעי)

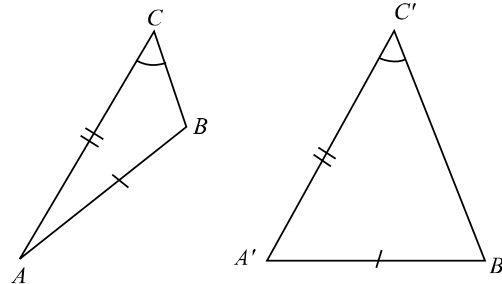
שני משולשים השווים באורכי שתי צלעות ובזווית שממול לצלע הארוכה מביניהן, חופפים.

בניסוח מפורט:

יהיו $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ שני משולשים. אם $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, ו- $\angle ACB = \angle A'C'B'$ אז $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



חשוב להדגיש שהתנאי $\overline{AB} > \overline{AC}$ הוא חיוני במשפט זה. אם נתון שוויון של שתי צלעות ושוויון הזווית שמול הצלע הקצרה, לא מובטח שהמשולשים חופפים. נתבונן בדוגמה הבאה:



באיור זה, שני המשולשים אינם חופפים, למרות שמתקיים $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ ו- $\angle ACB = \angle A'C'B'$.

עתה נדגים את השימוש במשפטי החפיפה. נתחיל בהוכחת המשפט הבא:

משפט 8.21

במשולש, אשר כל צלעותיו שוות זו לזו, שוות גם כל הזוויות זו לזו.

משולש שכל צלעותיו שוות זו לזו נקרא **משולש שווה-צלעות**. משמעות המשפט היא שמשולש שווה-צלעות הוא משולש משוכלל. לפי האמור בעמוד 151, כל זוויותיו של משולש כזה שוות 60° .

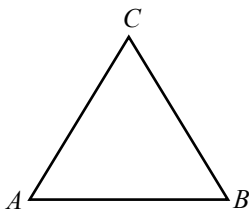
הוכחת המשפט

יהי $\triangle ABC$ משולש שווה-צלעות. במשולש זה מתקיים $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$. כעת נתבונן במשולש $\triangle ACB$, שבו הקודקודים זהים לקודקודי המשולש המקורי, אך כתובים בסדר שונה. נבחן את ההתאמה בין קודקודי שני המשולשים:

- לקודקוד A במשולש $\triangle ABC$ מתאים הקודקוד A במשולש $\triangle ACB$.
- לקודקוד B במשולש $\triangle ABC$ מתאים הקודקוד C במשולש $\triangle ACB$.
- לקודקוד C במשולש $\triangle ABC$ מתאים הקודקוד B במשולש $\triangle ACB$.

בהתאם לכך:

- לצלע AB במשולש $\triangle ABC$ מתאימה הצלע AC במשולש $\triangle ACB$.
- לצלע AC במשולש $\triangle ABC$ מתאימה הצלע AB במשולש $\triangle ACB$.
- לצלע BC במשולש $\triangle ABC$ מתאימה הצלע CB במשולש $\triangle ACB$.

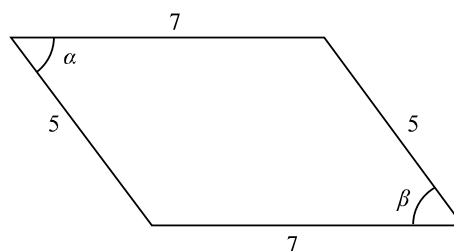


מהשוויון $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$ נובע שכל צלע במשולש $\triangle ABC$ שווה באורכה לצלע המתאימה במשולש $\triangle ACB$.
 לפי משפט החפיפה השלישי (צ.צ.צ.), $\triangle ABC \cong \triangle ACB$.
 מכאן נובע שכל זווית במשולש $\triangle ABC$ שווה לזווית המתאימה לה במשולש $\triangle ACB$.
 הזווית $\angle ABC$ במשולש $\triangle ABC$ מתאימה לזווית $\angle ACB$ במשולש $\triangle ACB$.
 לכן: $\angle ABC = \angle ACB$.
 באופן דומה, ניתן להוכיח ש- $\triangle ABC \cong \triangle BAC$ ולהסיק ש- $\angle ABC = \angle BAC$.
 לכן, כל זוויות המשולש $\triangle ABC$ שוות זו לזו. $\square$

שאלה 10

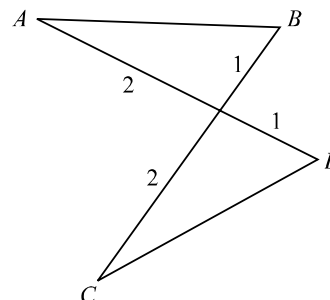
היעזרו בחפיפת משולשים לפתרון השאלות הבאות:

א.



הוכיחו כי $\alpha = \beta$.

ב.



הוכיחו כי $\overline{AB} = \overline{CD}$.

התשובה בעמוד 288

משולש שווה-שוקיים

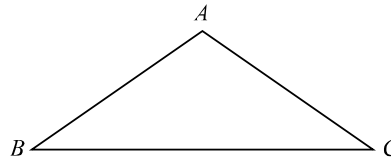
משולש נקרא **שווה-שוקיים** אם יש בו שתי צלעות השוות זו לזו באורכן. במקרה זה, הצלעות השוות נקראות **השוקיים**, והצלע השלישית נקראת **הבסיס**. לשתי הזוויות הסמוכות לבסיס קוראים **זוויות הבסיס**. הזווית השלישית נקראת **זווית הראש**.

משפט 8.22

במשולש שווה-שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.

הוכחה

נתבונן במשולש $\triangle ABC$ שבו מתקיים $\overline{AB} = \overline{AC}$:



בדומה להוכחת משפט 8.21, נובע ש- $\triangle ABC \cong \triangle ACB$, ולכן $\angle ABC = \angle ACB$. $\square$

שאלה 11

א. במשולש שווה-שוקיים מסוים, זוויות הבסיס הן 20° . מהי זווית הראש?

ב. במשולש שווה-שוקיים מסוים, זווית הראש היא 80° . מהן זוויות הבסיס?

המשפט הבא הוא משפט הפוך למשפט 8.22:

משפט 8.23

אם שתי זוויות במשולש שוות זו לזו בגודלן, אז הצלעות שמולן שוות זו לזו באורכן.

שאלה 12

הוכיחו את משפט 8.23.

משילוב שני המשפטים האחרונים, נקבל:

מסקנה 8.24

משולש הוא שווה-שוקיים אם ורק אם שתיים מזוויותיו שוות זו לזו.

שאלה 13

הוכיחו שאם כל הזוויות של משולש שוות זו לזו אז הוא שווה-צלעות.

ישרים מאונכים; גובה במשולש

נתבונן במצב שבו שני ישרים נחתכים בנקודה אחת, ונניח שאחת מארבע הזוויות הנוצרות היא זווית ישרה. במקרה זה כל ארבע הזוויות הן ישרות: שתי הזוויות שליד הזווית הישרה הן זוויות משלימות לה ולכן שוות ל- $90^\circ = 180 - 90$. הזווית שמול הזווית הישרה היא זווית קודקודית לה ולכן שווה גם היא ל- 90° .

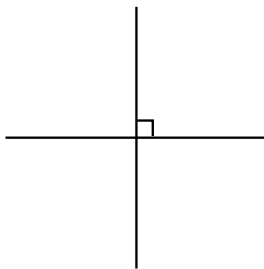
במצב זה נאמר ששני הישרים הם **מאונכים**, או **ניצבים**, זה לזה.

כדי לציין שישיר ℓ מאונך לישר m , נכתוב: $\ell \perp m$.

התשובה בעמוד 289

התשובה בעמוד 289

התשובה בעמוד 289



משפט 8.25

יהי ℓ ישר ותהי P נקודה. אז יש ישר יחיד העובר דרך P ומאונך ל- ℓ .

הוכחה

נוכיח תחילה את קיומו של ישר כנדרש:

תהי Q נקודה כלשהי על הישר ℓ . נעביר דרכה ישר m המאונך לישר ℓ . אם עובר דרך P , מצאנו ישר כנדרש. אחרת, נמצאת מחוץ לישר m , ולפי אקסיומת המקבילים (אקסיומה 8.3), קיים קו ישר יחיד, m' , המקביל ל- m ועובר דרך P . הישר m' נחתך עם הישר ℓ , לפי מסקנה 8.6. הזווית α שבאיור מתחלפת עם הזווית הישרה שבין ℓ ו- m . לכן $\alpha = 90^\circ$, ומכאן $m' \perp \ell$. מצאנו ש- m' מקיים את התכונות המבוקשות.

כעת נוכיח שיש ישר המקיים תכונות אלה הוא יחיד:

נניח ששני ישרים, m ו- m' , מקיימים את התכונות המבוקשות. שני הישרים יוצרים זווית ישרה עם הישר ℓ , ולפי משפט 8.5, הם זהים או מקבילים. לא ייתכן שהם מקבילים, כי P היא נקודה משותפת לשניהם. לכן $m = m'$. $\square$

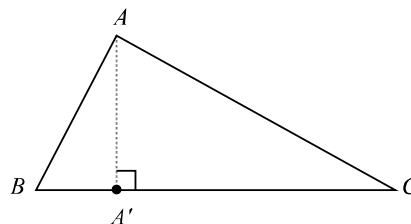
הישר המאונך לישר ℓ ועובר דרך נקודה P נקרא **האנך ל- ℓ דרך P** .

נקודת החיתוך של האנך עם הישר ℓ נקראת **היטל הנקודה P על הישר ℓ** .

נסמן נקודה זו ב- P' . ניתן להוכיח ש- P' היא הנקודה הקרובה ביותר ל- P מבין נקודות הישר ℓ (ראו שאלה 26 שבהמשך). האורך $\overline{PP'}$ הוא, לפיכך, המרחק הקטן ביותר של הנקודה P מנקודות הישר ℓ . מסיבה זו, האורך $\overline{PP'}$ נקרא **מרחק הנקודה P מהישר ℓ** .

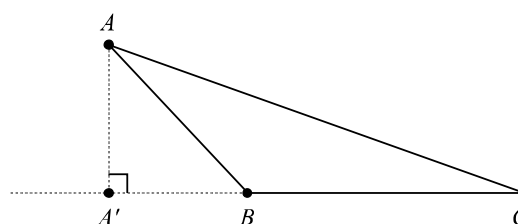
נתבונן עתה במשולש $\triangle ABC$. הקטע המחבר בין קודקוד של המשולש לבין ההיטל שלו על הצלע הנגדית (או על המשכה) נקרא **גובה** במשולש.

בפרט, נתבונן בגובה מהקודקוד A אל הצלע BC :



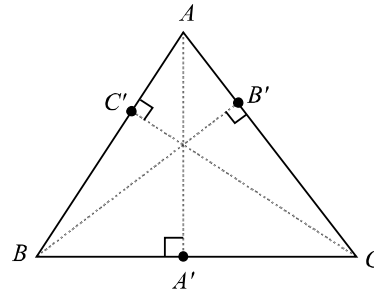
הנקודה A' שבאיור (היטל הקודקוד A על הצלע BC) נקראת **עקב הגובה המורד מ- A** .

כעת נתבונן בגובה במשולש הבא:



במקרה זה, עקב הגובה לא חל על הצלע BC אלא על המשכה. תופעה זו קורית כשאחת הזוויות $\angle B$, $\angle C$ קהה.

במשולש $\triangle ABC$ קיימים שלושה גבהים: מכל קודקוד מורד גובה אל הצלע הנגדית.



במשולש שבאיור, ניתן להבחין ששלושת הגבהים נפגשים בנקודה אחת. תופעה זו נכונה באופן כללי:

משפט 8.25

שלושת הגבהים במשולש (או המשכיהם) נפגשים בנקודה אחת.

לא נוכיח משפט זה.

שאלה 14

במשולש $\triangle ABC$ נתונות הזוויות $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 70^\circ$. הקטע AA' הוא הגובה לצלע BC . מצאו את הזוויות $\angle BAA'$ ו- $\angle A'AC$.

התשובה בעמוד 289

שאלה 15

הוכיחו:

א. שני ישרים המאונכים לאותו הישר הם זהים או מקבילים.

ב. אם $m \perp \ell$ ו- $k \parallel m$ אז $k \perp \ell$.

התשובה בעמוד 290

תיכון, חוצה זווית ואנך אמצעי

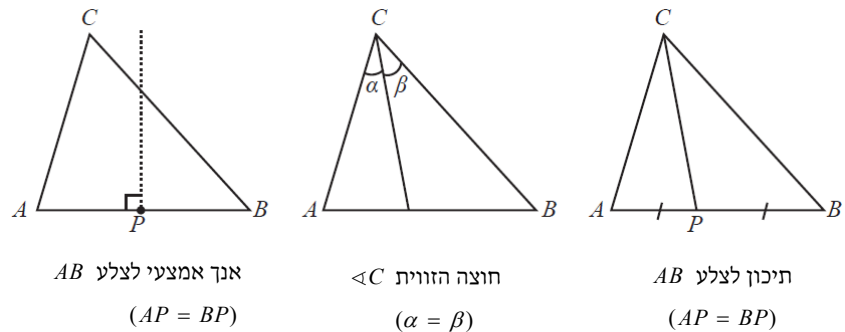
בדומה לשלושת הגבהים, המוגדרים בכל משולש, מוגדרים הקטעים הבאים:

א. קטע המחבר בין קודקוד לאמצע הצלע שמולו נקרא **תיכון**.

ב. קטע המחבר בין קודקוד לנקודה על הצלע הנגדית, ומחלק את הזווית של הקודקוד לשני חלקים שווים, נקרא **חוצה זווית**.

ג. ישר המאונך לצלע ועובר דרך אמצע הצלע נקרא **אנך אמצעי**.

באיור הבא מודגמים מושגים אלה:



המשפט הבא (המאגד בתוכו שלושה משפטים) יובא ללא הוכחה:

משפט 8.26

בכל משולש:

- שלושת התיכונים נפגשים בנקודה אחת (נקודה זו נקראת **מרכז הכובד** של המשולש).
- שלושת חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת.
- שלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה אחת.

בהמשך השיעור נעמוד על טיבן של נקודת מפגש חוצי הזוויות ונקודת מפגש האנכים האמצעיים.

שאלה 16

במשולש $\triangle ABC$ נתונות הזוויות $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 70^\circ$. הקטע AA' הוא חוצה הזווית $\angle A$ (מונחת על הצלע BC). מצאו את הזוויות $\angle BAA'$ ו- $\angle AA'C$.

במשולש שווה-שוקיים חלה התלכדות בין כמה מהמונחים שהוגדרו:

משפט 8.27

יהי $\triangle ABC$ משולש שווה-שוקיים: נניח ש- $\overline{AB} = \overline{AC}$. אז הגובה, התיכון וחוצה הזווית היוצאים מהנקודה A , מתלכדים.

הוכחת משפט 8.27 היא תרגיל טוב בחפיפת משולשים.

שאלה 17

הוכיחו את משפט 8.27.

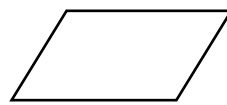
התשובה בעמוד 290

התשובה בעמוד 290

סוגי מרובעים

מרובע הוא מצולע כלשהו בעל ארבעה קודקודים. נכיר כמה סוגים מיוחדים של מרובעים:

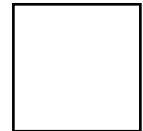
- א. **ריבוע** הוא מרובע משוכלל.
- ב. **מלבן** הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.
- ג. **מקבילית** היא מרובע בעל שני זוגות של צלעות מקבילות זו לזו.
- ד. **טרפז** הוא מרובע בעל זוג אחד של צלעות מקבילות זו לזו.
- ה. **דלתון** הוא מרובע בעל שני זוגות של צלעות סמוכות שוות זו לזו.
- ו. **מעוין** הוא מרובע שכל צלעותיו שוות זו לזו.



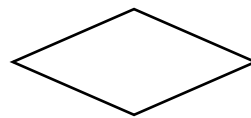
מקבילית



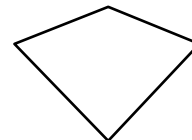
מלבן



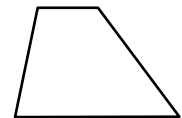
ריבוע



מעוין



דלתון



טרפז

נכיר כמה מהתכונות היסודיות של מרובעים אלה:

א. לפי ההגדרה, ריבוע הוא מרובע שכל זוויותיו שוות זו לזו, וכל צלעותיו שוות זו לזו. כפי שראינו, כל זוויות הריבוע הן ישרות. לכן הריבוע נקבע על פי אורך צלעו: כל הריבועים בעלי אורך צלע נתון, a , חופפים זה לזה.

ב. כל ריבוע הוא מלבן. דבר זה נובע מיידית מכך שזוויות הריבוע הן ישרות.

ג. כל מלבן הוא מקבילית. דבר זה נובע מכך ששתי צלעות נגדיות של המלבן מאונכות לאותה הצלע (כי הן מאונכות לשתי הצלעות האחרות), ולכן הן מקבילות (לפי שאלה 14).

ד. במקבילית, כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו, וכל שתי זוויות סמוכות מסתכמות ל- 180° .

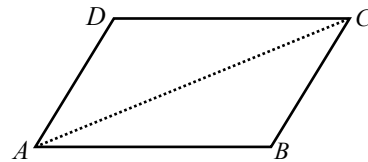
הוכחה:

דבר זה נובע מיידית מכך שזוויות נגדיות במקבילית הן זוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים, וזוויות סמוכות במקבילית הן זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים. □

ה. במקבילית, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.

הוכחה:

נתבונן במקבילית $ABCD$, ונעביר את הקטע AC .



נוכיח את חפיפת המשולשים $\triangle ACD \cong \triangle CAB$:

$\angle ACD = \angle CAB$ כזוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים,

$\angle DAC = \angle BCA$ וגם

$\overline{AC} = \overline{CA}$ כמו כן, מתקיים:

לפי משפט החפיפה ז.צ.ז, המשולשים חופפים.

מחפיפה זו נובע:

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

באופן דומה ניתן להוכיח ש- $\overline{AD} = \overline{BC}$.

□

ו. במלבן, כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.

טענה זו היא מסקנה מיידית מהטענה בסעיף ה, כי כל מלבן הוא מקבילית.

צורת המלבן נקבעת לפיכך על ידי אורכי צלעותיו: כל שני מלבנים שאורכי צלעותיהם

הם מספרים נתונים a ו- b , הם חופפים.

ז. (טענה הפוכה לתכונה ה): מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.

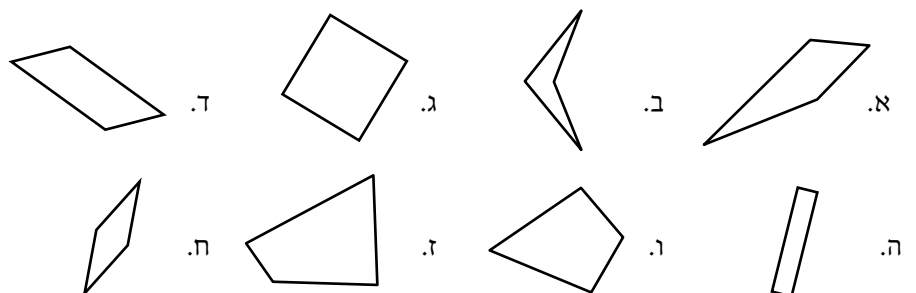
להוכחה, ראו שאלה 19.

ח. כל מעוין הוא מקבילית.

טענה זו נובעת מיידית מהטענה הקודמת.

שאלה 18

קבעו את סוגו של כל מרובע.



התשובה בעמוד 291

שאלה 19

התשובה בעמוד 291

הוכיחו את תכונה זו: מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.

שאלה 20

אלכסון במרובע הוא קטע המחבר שני קודקודים נגדיים.

א. הוכיחו שבדלתון קמור, שני האלכסונים מאונכים זה לזה ואחד האלכסונים חוצה את רעהו (כלומר מחלק אותו לשני חלקים שווים).

התשובה בעמוד 291

ב. הוכיחו שבריבוע ובמעוין, שני האלכסונים מאונכים זה לזה וחוצים זה את זה.

היקף של מצולע

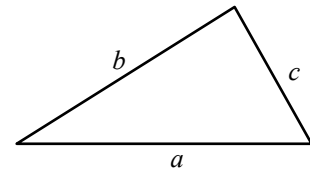
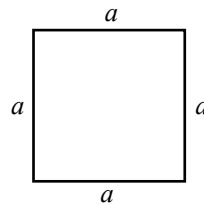
ההיקף של מצולע מוגדר כסכום אורכי צלעותיו. באופן ציורי, אם נצא מקודקוד של המצולע, ונלך לאורך המצולע עד שנשוב אל נקודת ההתחלה, המרחק שנעבור ישווה להיקף המצולע. את ההיקף נסמן בדרך כלל באות p (קיצור המילה האנגלית perimeter).

לדוגמה, בהינתן משולש שאורכי צלעותיו הם a , b ו- c , היקף המשולש הוא:

$$p = a + b + c$$

ובהינתן ריבוע שאורך צלעו הוא a , היקפו הוא

$$p = a + a + a + a = 4a$$



שאלה 21

א. מצאו נוסחה להיקף מלבן שאורכו הוא a ורוחבו הוא b .

התשובה בעמוד 291

ב. הוכיחו שהאורך של כל צלע במשולש קטן ממחצית היקפו.

מושג השטח

כולנו מכירים את מושג השטח מחיי היומיום. לדוגמה, שטח של דירה נמדד במטרים רבועים; שטח של מגרש נמדד בדונמים (דונם = אלף מטרים רבועים); שטח של מדינה נמדד בדרך כלל בקילומטרים רבועים.

מושג השטח הוא אחת הסיבות להתפתחות ענף הגיאומטריה. משמעותה המילולית של המילה היוונית גיאומטריה היא 'מדידת אדמה'.

הספר הראשון בשפה העברית שעסק בגיאומטריה באופן שיטתי הוא חיבורו של ר' אברהם בר חייא, שחי במאות ה-11 וה-12 בספרד, 'חבור המשיחה והתשבורת'. במבוא לספר זה מסביר בר חייא שלימוד הגיאומטריה חיוני לחישוב מדויק של שטחי קרקעות המאפשר חלוקה צודקת של קרקעות המתחייבת ממצוות התורה.

מושג השטח מייחס ערך מספרי אי-שלילי לקבוצות במישור. לא נגדיר מושג זה במלואו, אך נסתמך על מספר תכונות יסוד של:

א. השטח של מלבן שאורכי צלעותיו הם a ו- b שווה למכפלת אורכים אלה. ובנוסחה:

$$S = ab$$

האות S מציינת שטח.

ב. השטח של גוף חד-מימדי כמו ישר, קרן או קטע שווה לאפס.

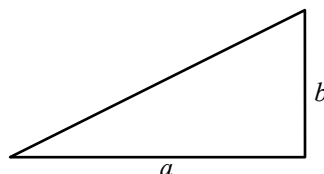
ג. אם נחלק צורה לשני חלקים, יהיה שטחה שווה לסכום שטחי שני החלקים.

ד. צורות חופפות הן שוות-שטח.

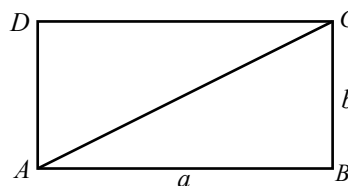
בדומה לאורך, שמצוין בגיאומטריה ללא יחידות, גם השטח של צורות גיאומטריות הוא מספר ללא יחידה. אך אם נבחר יחידת אורך, תתקבל ממנה מיידית יחידת שטח. לדוגמה, אם יחידת האורך היא מטר אז יחידת השטח היא מטר רבוע (מ"ר); ואם יחידת האורך היא סנטימטר אז יחידת האורך היא סנטימטר רבוע (סמ"ר). בהתאם לכך, בהינתן מלבן שאורכו שלושה מטר ורוחבו שני מטר, שטחו של המלבן הוא שישה מטרים רבועים.

נפנה למדידת שטחיהן של צורות גיאומטריות שונות.

נתבונן תחילה במשולש ישר-זווית. שוקיה של הזווית הישרה במשולש כזה נקראות **ניצבים**, והצלע שמול הזווית הישרה נקראת **יתר**.



כדי לחשב את השטח של משולש ישר זווית, שאורכי ניצביו הם a ו- b , נתבונן במלבן $ABCD$ שאורכי צלעותיו הם a ו- b , ובאלכסון AC :



האלכסון מחלק את המלבן לשני משולשים ישרי-זווית, שאורכי ניצביהם הם a ו- b . משולשים אלה חופפים (צ.ז.צ), ובפרט שווים בשטחם. לפיכך, שטח המלבן כפול משטח כל אחד מהמשולשים:

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = 2S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{S_{ABCD}}{2} = \frac{ab}{2}$$

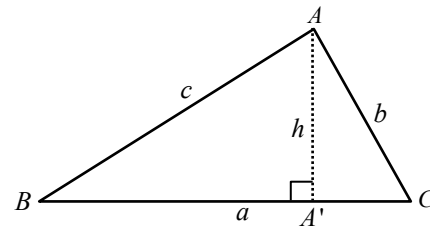
נחלק ב-2:

קיבלנו את הכלל הבא:

שטח משולש ישר-זווית שווה למחצית מכפלת ניצביו.

כעת נפנה לחישוב השטח של משולש כלשהו.

יהי $\triangle ABC$ משולש, ונציירו באופן הבא:



כשהמשולש מוצג במצב זה (הצלע BC במאוזן והקודקוד A מעל הצלע), מקובל לקרוא לצלע BC **בסיס המשולש**.

נתבונן בגובה AA' מהקודקוד A אל הבסיס. נסמן $h = \overline{AA'}$.

אורך זה נקרא **גובה המשולש**.

הגובה AA' מחלק את המשולש לשני משולשים ישרי-זווית, $\triangle AA'B$ ו- $\triangle AA'C$. נחשב את שטחיהם לפי הנוסחה שפיתחנו לעיל:

$$S_{\triangle AA'B} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{BA'}}{2} = \frac{h \cdot \overline{BA'}}{2}, \quad S_{\triangle AA'C} = \frac{\overline{AA'} \cdot \overline{CA'}}{2} = \frac{h \cdot \overline{CA'}}{2}$$

שטח המשולש $\triangle ABC$ שווה לסכום שני שטחים אלה:

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AA'B} + S_{\triangle AA'C} = \frac{\overline{BA'} \cdot h}{2} + \frac{\overline{CA'} \cdot h}{2} = \frac{(\overline{BA'} + \overline{A'C})h}{2}$$

הצלע BC , המסומנת גם על ידי האות a , מחולקת על ידי הנקודה A' לקטעים BA' ו- $A'C$. לפיכך:

$$\overline{BA'} + \overline{A'C} = \overline{BC} = a$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ah}{2}$$

ומתקבלת הנוסחה

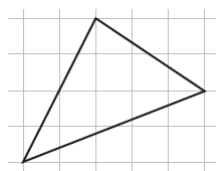
במילים: **שטח המשולש שווה לחצי מכפלת הבסיס בגובה**.

אין הכרח שהמשולש יהיה מוצג כך שאחת הצלעות היא במאוזן, כדי להיעזר בכלל זה. ניתן לבטאו בניסוח כללי יותר:

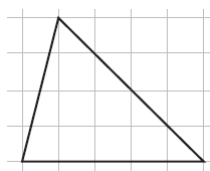
שטח המשולש שווה לחצי מכפלת אורך צלע בגובה המורד אליה מהקודקוד הנגדי.

שאלה 22

חשבו את שטחי המשולשים הבאים:



ג.



ב.



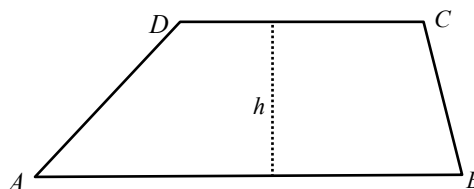
א.

התשובה בעמוד 292

הערה: כל משבצת באיור זה היא ריבוע שאורך צלעו הוא 1.

נעבור להצגת נוסחאות השטח של מקבילית ושל טרפז.

נתבונן בטרפז $ABCD$ שבו נתון $AB \parallel CD$:

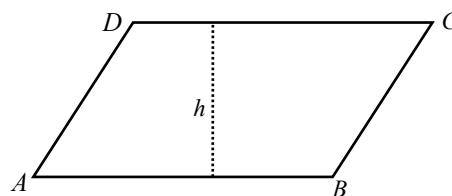


נוריד מנקודה כלשהי על פני הצלע CD אנך לצלע AB . ניתן להוכיח שאורך האנך אינו תלוי בבחירת הנקודה. אורך זה נקרא **גובה הטרפז** ומסומן h .
הקטעים AB ו- CD נקראים **בסיסי הטרפז**. נוסחת השטח של טרפז היא:

$$S_{ABCD} = h \cdot \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$

ובמילים: **שטח הטרפז שווה למכפלת גובה הטרפז בממוצע אורכי הבסיסים**.
לא נוכיח נוסחה זו.

כעת נתבונן במקבילית $ABCD$:



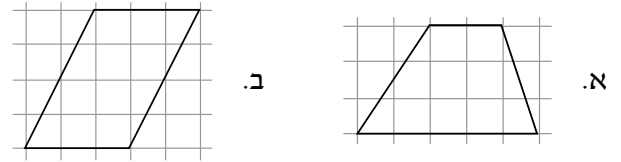
גם במרובע זה מתקיים $AB \parallel CD$; נוסחת השטח שהוצגה לטרפז נכונה גם במקרה זה.
במקבילית מתקיים $\overline{AB} = \overline{CD}$. מכאן, $(\overline{AB} + \overline{CD})/2 = \overline{AB}$, ולכן

$$S_{ABCD} = h \cdot \overline{AB}$$

במילים: **שטח המקבילית שווה למכפלת אורך צלע המקבילית בגובה היורד אל צלע זו**.

שאלה 23

חשבו את שטחי המרובעים הבאים:



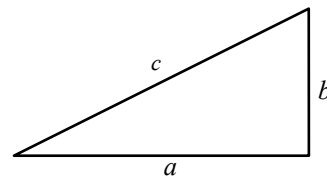
הערה: כל משבצת באיור זה היא ריבוע שאורך צלעו הוא 1.

שאלה 24

הוכיחו: שטחו של דלתון קמור שווה למחצית מכפלת אורכי אלכסוניו.

משפט פיתגורס

נתבונן במשולש ישר-זווית שניצביו הם a ו- b , והיתר שלו הוא c :



המשפט הבא, הקרוי על שמו של המתמטיקאי והפילוסוף היווני פיתגורס, מתאר קשר אלגברי בין אורכי צלעות המשולש:

משפט 8.28 (משפט פיתגורס)

במשולש ישר-זווית, ריבוע אורך היתר שווה לסכום ריבועי אורכי הניצבים:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

הוכחה

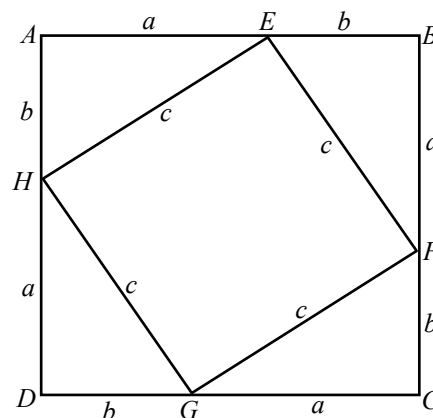
נתבונן במרובע $ABCD$ שאורך צלעו הוא $a + b$, ונקצה על צלעותיו נקודות E, F, G, H

$$\overline{AE} = \overline{BF} = \overline{CG} = \overline{DH} = a$$

כמתואר באיור, כך ש:

$$\overline{EB} = \overline{FC} = \overline{GD} = \overline{HA} = b$$

מבנייה זו נובע:



התשובה בעמוד 292

התשובה בעמוד 292

◁ פיתגורס (ביוונית: Πυθαγόρας; 582 לפנה"ס בקירוב – 496 לפנה"ס בקירוב). מתמטיקאי ופילוסוף יווני. מייסד האסכולה הפיתגוראית אשר עסקה במתמטיקה, פילוסופיה, אסטרונומיה ומוזיקה.

$$\triangle AEH, \triangle BFE, \triangle CGF, \triangle DHG$$

כעת נתבונן במשולשים:

כל המשולשים הם ישרי-זווית ואורכי הניצבים שלהם הם a ו- b . לכן כל המשולשים חופפים זה לזה לפי משפט החפיפה צ.ז.צ, ואורך היתר של כולם הוא c . לכן אורך כל צלעות המרובע $EFGH$ הוא c .

מחפית המשולשים $\triangle AEH \cong \triangle BFE$ נובע שוויון הזוויות $\angle AHE = \angle BEF$. לכן:

$$180^\circ = \angle AEH + \angle HEF + \angle BEF = \angle AEH + \angle HEF + \angle AHE$$

מצד שני, במשולש $\triangle AEH$ סכום הזוויות הוא 180° , והזווית $\angle A$ היא ישרה, לכן:

$$\angle AEH + \angle AHE = 90^\circ$$

$$\angle HEF = 180^\circ - (\angle AEH + \angle AHE) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \quad \text{לפיכך:}$$

באופן דומה ניתן להוכיח שכל זוויות המרובע $EFGH$ הן ישרות.

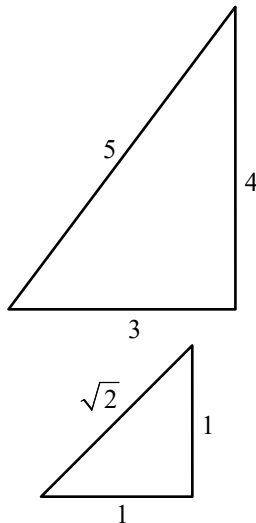
הוכחנו אפוא שהמרובע $EFGH$ הוא ריבוע, שאורך צלעו הוא c . שטח הריבוע הגדול $ABCD$ שווה לסכום שטחי הריבוע $EFGH$ וארבעת המשולשים ישרי הזווית. לפיכך:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$\square \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

משפט פיתגורס הוא אחד המשפטים הנודעים במתמטיקה, ושימושיותו רבה. נוכל למצוא בעזרתו את אורך אחת הצלעות במשולש ישרי-זווית, בהינתן אורכי שתי הצלעות האחרות. נתבונן בדוגמאות הבאות:



א. נתבונן במשולש ישרי-זווית שאורכי ניצביו הם 3 ו-4. כדי למצוא את אורך היתר, נסמן אותו ב- c . לפי משפט פיתגורס:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

$$c = 5$$

c הוא חיובי, ולכן נסיק:

אורך היתר הוא, אפוא, 5.

ב. נתבונן במשולש ישרי-זווית שאורכי שני ניצביו הם 1. אורך היתר, c , מקיים:

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$c = \sqrt{2}$$

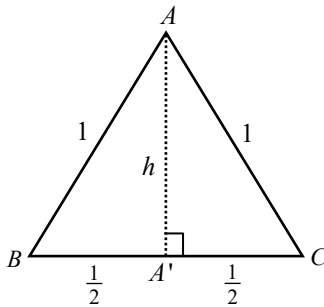
מכאן:

הערה: כזכור משיעור 1, המספר $\sqrt{2}$ אינו רציונלי, כלומר, אינו ניתן להבעה כיחס בין מספרים שלמים. קיומו של קטע במישור שאורכו אינו רציונלי היה תגלית מפתיעה,

ואפילו מאכזבת, עבור אסכולת הפיתגוראים, תלמידיו וממשיכי דרכו של פיתגורס.

עד לגילוי זה הם החזיקו באמונה שהיקום כולו מתנהל על פי יחסים בין מספרים שלמים, לרבות תנועות הכוכבים בשמיים והיחסים בין אורכי מיתר המפיקים צלילים שונים בסולם המוזיקלי. אמונה זו ספגה מכה כואבת עם אותו גילוי.

ג. נתבונן במשולש שווה-צלעות $\triangle ABC$, שאורך צלעו הוא 1. נחשב את גובה המשולש מהקודקוד A :



$$\overline{A'C} = \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{לפי משפט 8.27, הגובה } AA' \text{ הוא גם תיכון, ולכן}$$

כעת, נתבונן במשולש $\triangle AA'C$. משולש זה הוא ישר-זווית, ולפי משפט פיתגורס,

$$\overline{AA'}^2 + \overline{A'C}^2 = \overline{AC}^2$$

$$h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1^2 \quad \text{הגובה } h = \overline{AA'} \text{ מקיים, אפוא,}$$

$$\Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ומכיוון ש- h חיובי:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{ah}{2} = \frac{1 \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad \text{כעת נוכל לחשב את שטח המשולש:}$$

שאלה 25

- במשולש ישר-זווית, אורכי הניצבים הם 1 ו-2. מצאו את אורך היתר.
- במשולש ישר-זווית ושווה-שוקיים, אורך היתר הוא 3. מצאו את אורכי הניצבים.
- מצאו את אורך האלכסון במלבן שממדיו הם 5×12 .

התשובה בעמוד 293

שאלה 26

יהיו ℓ ישר, P נקודה במישור, ו- P' היטל הנקודה P על הישר ℓ . הוכיחו שמבין כל נקודות הישר ℓ , P' היא הנקודה שמרחקה מ- P הוא הקטן ביותר.

התשובה בעמוד 293

נוסחת הרון

הנוסחה שנציג כעת מאפשרת לחשב את שטחו של כל משולש, בהינתן אורכי צלעותיו.

משפט 8.29 (נוסחת הרון)

בהינתן משולש שאורכי צלעותיו הם a , b ו- c , נגדיר: $p = (a + b + c)/2$. שטח המשולש הוא:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

נדגים את השימוש במשפט:

א. נתבונן במשולש שאורכי צלעותיו הם 2, 2, 3. נחשב:

$$p = \frac{2+2+3}{2} = \frac{7}{2}$$

שטח המשולש הוא:

$$S = \sqrt{\frac{7}{2} \left(\frac{7}{2} - 2 \right) \left(\frac{7}{2} - 2 \right) \left(\frac{7}{2} - 3 \right)} = \sqrt{\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 7}{16}} = \frac{3}{4} \sqrt{7}$$

ב. נתבונן במשולש שווה-צלעות שאורך צלעו הוא 1. נחשב:

$$p = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \left(\frac{3}{2} - 1 \right) \left(\frac{3}{2} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

שטח המשולש הוא:

קיבלנו את אותה תוצאה שחישבנו בעבר.

שאלה 27

בהינתן משולש שאורכי צלעותיו הם 5, 6, 7:

א. חשבו את שטח המשולש.

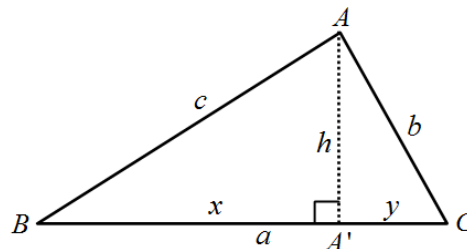
ב. חשבו את אורכי שלושת גובהי המשולש.

התשובה בעמוד 293

שאלה 28 (*)

הוכיחו את נוסחת הרון.

הדרכה: התבוננו באיור הבא –



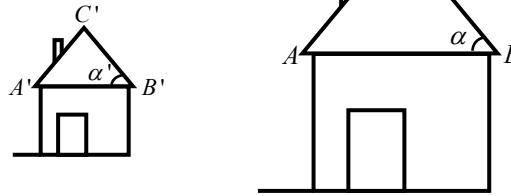
מצאו 3 משוואות המקשרות בין הגדלים $x = \overline{BA'}$, $y = \overline{A'C}$, $h = \overline{AA'}$.

התשובה בעמוד 294

◁ בשיעור זה (*) מציינת שאלה מאתגרת, למעוניינים להתעמק בנושא מסוים.

דמיון – מבוא אינטואיטיבי

נתבונן בשתי הצורות הבאות:



הצורה הימנית מתקבלת מהשמאלית על ידי הגדלה פי 2 (חשבו למשל על מכונית צילום המגדילה מסמך פי 2 או על הגדלה של תמונה על מסך הטלפון או המחשב).

נסמן: $\lambda = 2$. נבחין בתופעות הבאות: $\lambda = 2$ למדא (אות יוונית).

א. המרחק בין שתי נקודות בצורה מימין הוא פי λ מהמרחק בין שתי הנקודות המתאימות להן בצורה משמאל. למשל:

$$\overline{AB} = \lambda \cdot \overline{A'B'}$$

$$\overline{BC} = \lambda \cdot \overline{B'C'}$$

ב. היחס בין שני אורכי קטעים בצורה הימנית שווה ליחס בין אורכי הקטעים המתאימים בצורה השמאלית. לדוגמה:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$$

לשוויון זה נקרא: **שוויון בין יחסים פנימיים**.

ג. היחס בין קטע בצורה הימנית לקטע המתאים לו בצורה השמאלית שווה ליחס בין כל קטע אחר בצורה הימנית לקטע המתאים לו בצורה השמאלית. לדוגמה:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

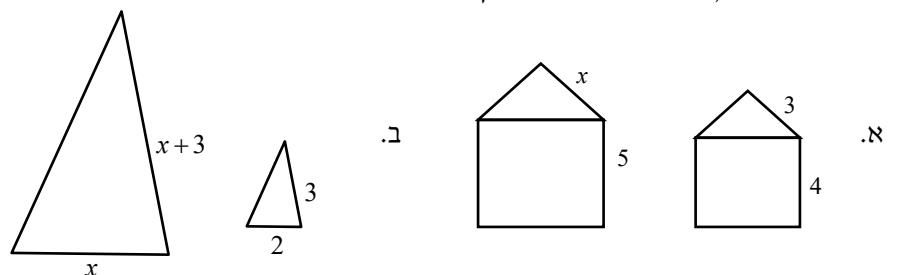
לשוויון זה נקרא: **שוויון בין יחסים חיצוניים**.

ד. כל זווית בצורה הימנית שווה לזווית המתאימה לה בצורה השמאלית. לדוגמה: $\alpha = \alpha'$.

נאמר שצורות אלה הן **דומות**, או **פרופורציונליות**. המספר λ נקרא **יחס הדמיון**, או **קבוע הפרופורציה**.

שאלה 29

בכל אחד מהאיורים מצאו את הנעלם על ידי השוואת יחסים פנימיים, ועל ידי השוואת יחסים חיצוניים, ומצאו את יחס הדמיון.



דמיון מצולעים

נעבור להגדרת מושג הדמיון במצולעים, באופן פורמלי ומדויק.

בהינתן שני מצולעים שקודקודיהם (על פי סדרם) הם $P_1, P_2, \dots, P_n$ ו- $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$, נאמר שהמצולעים **דומים** אם מתקיימים התנאים הבאים:

א. אורכי הצלעות המתאימות פרופורציונליים, כלומר, קיים מספר קבוע λ שעבורו מתקיים

$$\overline{P_1 P_2} = \lambda \cdot \overline{Q_1 Q_2}, \overline{P_2 P_3} = \lambda \cdot \overline{Q_2 Q_3}, \dots, \overline{P_n P_1} = \lambda \cdot \overline{Q_n Q_1}$$

ב. גודלי הזוויות המתאימות שווים, כלומר:

$$\angle P_1 = \angle Q_1, \angle P_2 = \angle Q_2, \dots, \angle P_n = \angle Q_n$$

נסמן זאת כך: $P_1 P_2 \dots P_n \sim Q_1 Q_2 \dots Q_n$.

הקבוע λ בתנאי א נקרא **יחס הדמיון** בין המצולעים.

הערות:

א. הגדרת הדמיון דומה מאוד להגדרת החפיפה. ההבדל בין שני המושגים הוא שבדמיון, לא נדרש שוויון בין אורכי הצלעות, אלא קיומו של יחס קבוע ביניהם.

ב. כמו בהגדרת החפיפה, יש חשיבות לסדר שבו רושמים את קודקודי המצולעים; סדר זה מגדיר התאמה בין קודקודי המצולעים, צלעותיהם וזוויותיהם, כפי שהכרנו בעבר.

ג. ניתן לבטא את תנאי א ללא הקבוע λ , באמצעות השוויונות הבאים:

$$\frac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{Q_1 Q_2}} = \frac{\overline{P_2 P_3}}{\overline{Q_2 Q_3}} = \dots = \frac{\overline{P_n P_1}}{\overline{Q_n Q_1}}$$

שוויונות אלה הם בין יחסים חיצוניים. נובעים מהם שוויונות בין יחסים פנימיים.

לדוגמה:

$$\frac{\overline{P_1 P_2}}{\overline{P_2 P_3}} = \frac{\overline{Q_1 Q_2}}{\overline{Q_2 Q_3}}$$

שאלה 30

א. האם כל שני ריבועים הם דומים?

ב. האם כל שני מלבנים הם דומים?

ג. האם כל שני משולשים שווֹ-צלעות הם דומים?

ד. האם כל שני משולשים שווֹ-שוקיים הם דומים?

התשובה בעמוד 295

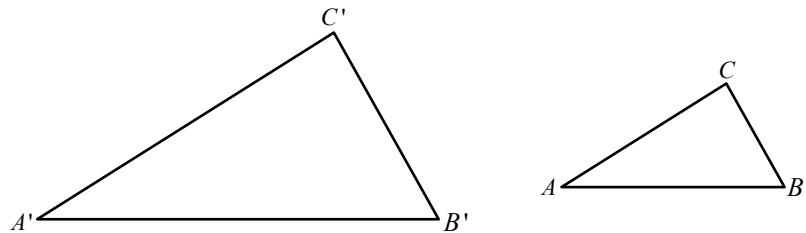
דמיון משולשים

בהינתן זוג משולשים, המשולשים הם דומים אם ניתן לבחור סדר עבור קודקודי המשולש הראשון: A, B, C וסדר עבור קודקודי המשולש השני: A', B', C' , כך שמתקיימים השוויונות הבאים:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

א. שוויון בין יחסי הצלעות:

ב. שוויון בין הזוויות המתאימות: $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$



דמיון המשולשים (בסדר הקודקודים שצוין לעיל) מסומן כך: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

המשפט הבא מראה כי ניתן להסתפק רק בחלק מתנאים אלה, ושאר התנאים נובעים מהם.

משפט 8.30

בהינתן המשולשים $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

א. אם מתקיים שוויון יחסי הצלעות:

אז $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$$

ב. אם מתקיים שוויון הזוויות:

אז $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

הערות:

א. ממשפט זה נוכל להסיק, בהינתן שוויון של זוויות, שוויון של יחסים בין צלעות משולשים.

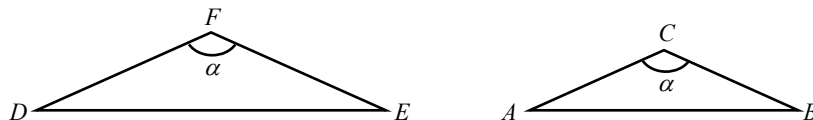
ב. מכיוון שסכום הזוויות בכל משולש הוא 180° , די לבדוק שמתקיימים שניים מבין שלושת השוויונות: $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$; השלישי ינבע מכך אוטומטית. לדוגמה, אם מתקיים $\angle A = \angle A', \angle B = \angle B'$ אז

$$\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - (\angle A' + \angle B') = \angle C'$$

דוגמה:

נתבונן בשני משולשים שוויושוקיים, שזווית הראש בהם שווה:

$$\overline{AC} = \overline{BC}, \overline{DF} = \overline{EF}, \angle C = \angle F = \alpha$$



במשולש $\triangle ABC$ מתקיים (לפי משפט 8.22) $\angle A = \angle B$. לכן:

$$2\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A = \frac{180^\circ - \angle C}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$$

$$\angle D = \frac{180^\circ - \angle F}{2} = \frac{180^\circ - \alpha}{2} \quad \text{באופן דומה, נקבל במשולש } \triangle DEF:$$

$$\angle A = \angle B = \angle D = \angle E \quad \text{לכן מתקיים:}$$

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F \quad \text{בפרט, מתקיימים השוויונות הבאים:}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \quad \text{מכאן נובע דמיון המשולשים:}$$

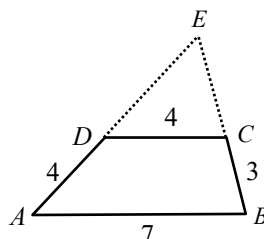
$$\text{נניח כעת שידועים הנתונים הבאים: } \overline{AB} = 5, \overline{BC} = 3, \overline{EF} = 5$$

מנתונים אלה נוכל לחשב את אורך הצלע DE :

$$\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{5}{3} \Rightarrow \overline{DE} = \overline{EF} \cdot \frac{5}{3} = 5 \cdot \frac{5}{3} = 8\frac{1}{3}$$

שאלה 31

באיור הבא, $ABCD$ הוא טרפז ($AB \parallel CD$):



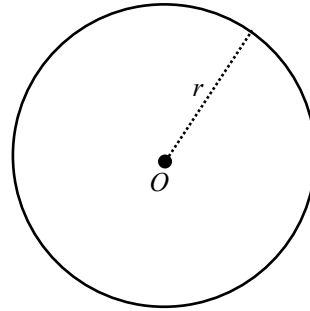
חשבו את $\overline{ED}$ ו- $\overline{EC}$.

התשובה בעמוד 295

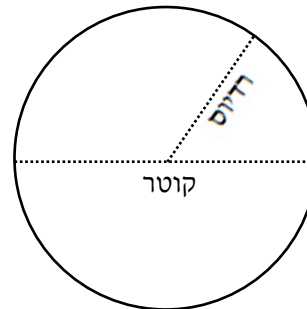
מעגל

לאוסף הנקודות במישור המקיימות תכונה מסוימת מקובל לקרוא **מקום גיאומטרי**.
צורת המעגל מוכרת לכולנו מחיי היומיום. הנה הגדרתה המתמטית:

תהי O נקודה במישור, ויהי r מספר ממשי חיובי.
המקום הגיאומטרי של כל הנקודות במישור שמרחקן מ- O הוא r נקרא מעגל. הנקודה O היא **מרכז המעגל** והמספר r הוא **רדיוס המעגל**.



קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה על המעגל נקרא אף הוא רדיוס (ואורכו שווה ל- r).
שני רדיוסים הנמצאים על ישר אחד יוצרים קטע הנקרא **קוטר**. אורכו של קטע זה הוא $2r$,
ומספר זה נקרא **קוטר המעגל**.



באופן מעשי, ניתן לצייר מעגל בעזרת מחוגה. כשחוד המחוגה נעוץ בנקודה O , ומפתח המחוגה (=המרחק בין חוד המחוגה לחוד העיפרון) הוא r , תשרטט המחוגה מעגל שמרכזו O ורדיוסו r .

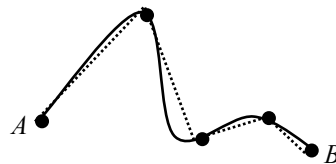
כל מעגל מחלק את המישור לשלושה חלקים: מה שבתוך המעגל, המעגל, ומה שמחוץ למעגל. אוסף הנקודות הנמצאות על המעגל או בתוכו נקרא **עיגול**. במילים אחרות, עיגול שמרכזו O ורדיוסו r הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מ- O אינו עולה על r .

היקף המעגל

נתבונן תחילה בקו עקום כלשהו במישור, אשר קצותיו הם הנקודות A ו- B :



הגדרת האורך של קו כזה באופן מדויק חורגת ממסגרת ספר זה, אך היא מתבססת על הרעיון הבא:



נבחר נקודות על פני הקו העקום, ונחבר אותן בקווים ישרים. הצורה המתקבלת, הנקראת **קו שבור**, היא קירוב לקו העקום. אורכו של הקו השבור ניתן לחישוב: הוא סכום אורכי הקטעים שמהם הוא מורכב. ככל שנוסיף נקודות ונקטין את המרחקים ביניהן, כך תתקרב צורת הקו השבור לצורתו של הקו העקום, ואורכו יתקרב לאורכו של הקו העקום.

דרך נוספת להבנה אינטואיטיבית של אורך הקו העקום היא לדמות חוט שצורתו כצורת הקו. אם נפרוש את החוט לאורך קו ישר, יתקבל קטע $A'B'$:



אורכו של הקו העקום AB שווה לאורך הקטע הישר $A'B'$.

עתה נעבור להיקף המעגל. היקף זה מוגדר כאורך הקו הנמתח לאורכו, מנקודה כלשהי A שעליו, לאורך הקפה שלמה ובחזרה לנקודה A .

משפט 8.31

היקף מעגל שרדיוסו r הוא $2\pi r$.

בנוסחת ההיקף שבמשפט, π (פאי) מייצג מספר קבוע, שפיתוחו העשרוני מתחיל כך:

$$\pi = 3.14159265\dots$$

קוטר המעגל הוא $2r$, ולכן π הוא היחס בין היקף המעגל לקוטרו. יחס זה הוא אפוא קבוע בכל המעגלים. ניתן להוכיח ש- π אינו מספר רציונלי.

$$2\pi \cdot 3 = 6\pi \approx 18.85$$

לדוגמה, היקף מעגל שרדיוסו 3 מטרים הוא:
כלומר כ־18 מטרים ו־85 סנטימטרים.

המספר π ריתק את המתמטיקאים לאורך הדורות, ושימושיו בתחומים שונים של המתמטיקה היא רבה.

אורך הקשת; זווית מרכזית

נעבור לחישוב האורך של קשת במעגל.

נתבונן בזווית $\angle AOB = \alpha$ שבין שני רדיוסים במעגל. זווית כזו נקראת **זווית מרכזית**.

חלק המעגל המוקצה על ידי הזווית $\angle AOB$ נקרא **קשת**. הקשת מסומנת כך: $\widehat{AB}$.

מכיוון שיש שתי דרכים להגיע מהנקודה A לנקודה B על פני המעגל (עם כיוון השעון או נגדו), נציין בדרך כלל מפורשות באיזו מהשתיים נבחר. כאשר לא נציין זאת, והנקודות A ו־ B אינן קצותיו של קוטר במעגל, נבחר בקשת הקצרה שבין שתי האפשרויות.

אורך הקשת $\widehat{AB}$ הוא פרופורציונלי לגודל הזווית α . כדי לחשבו, יש להכפיל את היקף המעגל בחלק היחסי של הזווית α מתוך המעגל השלם המייצג זווית של 360° . טענות אלה הן תוכנו של המשפט הבא:

משפט 8.32

אורך הקשת במעגל שרדיוסו r , המוקצית על ידי זווית מרכזית בגודל α מעלות, הוא

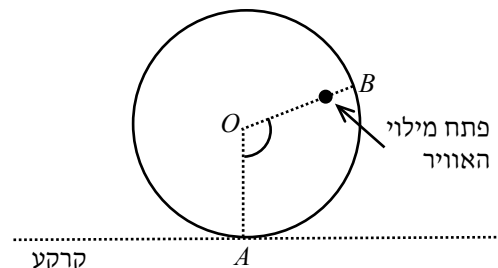
$$2\pi r \frac{\alpha}{360^\circ}$$

שאלה 32

קוטר הגלגל השמאלי הקדמי של מכונית הוא 50 ס"מ.

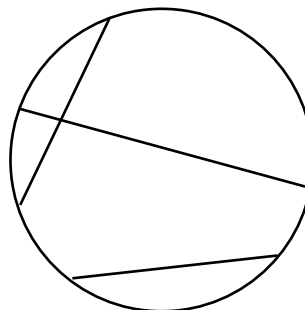
א. חשבו את היקף הגלגל.

ב. המכונית החלה את נסיעתה כשפתח מילוי האוויר היה בתחתית הגלגל. לאחר 10 מטרים המכונית נעצרה. חשבו את הזווית $\angle AOB$ שבאוויר (המתאר את מצב הגלגל לאחר העצירה).



מיתר במעגל

קטע המחבר שתי נקודות על המעגל נקרא **מיתר**.
באיור הבא מוצגים מיתרים במעגל:

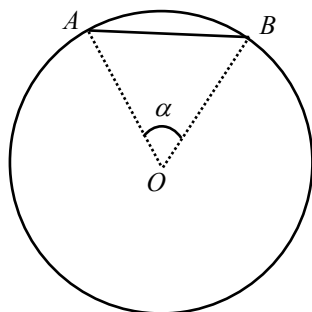


בפרט, כל קוטר הוא מיתר במעגל.

משפט 8.33

- א. כל מיתר במעגל נמצא בתוך המעגל.
ב. המיתרים הארוכים ביותר במעגל הם הקטרים.

לא נוכיח את המשפט.



בהינתן מיתר AB במעגל, נקבעת זווית מרכזית $\angle AOB$. נאמר שזווית זו **נשענת** על המיתר AB .
נתבונן בקשר שבין גודל הזווית $\angle AOB = \alpha$ לאורך המיתר AB : הזווית α קובעת את האורך $\overline{AB}$, ולהפך – האורך $\overline{AB}$ קובע את גודל הזווית α . קיומו של קשר זה מנוסח במדויק במשפט הבא:

משפט 8.34

יהיו AB ו- $A'B'$ שני מיתרים במעגל. אז $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ אם ורק אם $\angle AOB = \angle A'OB'$.

הוכחה

נסמן ב- R את רדיוס המעגל. הנקודות A, B, A', B' נמצאות על המעגל, ולכן מתקיים

$$\begin{aligned} \overline{OA} &= \overline{OB} = \overline{OA'} = \overline{OB'} = R \\ (1) \quad \overline{OA} &= \overline{OA'}, \quad \overline{OB} = \overline{OB'} \end{aligned}$$

בפרט מתקיים:

נניח שמתקיים $\overline{AB} = \overline{A'B'}$. יחד עם השוויונות (1) נקבל, לפי משפט החפיפה צ.צ.:

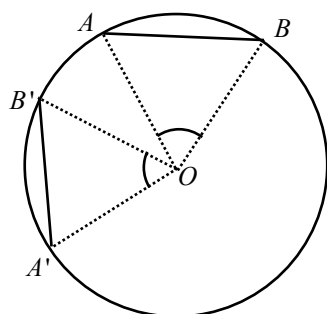
$$\begin{aligned} \triangle AOB &\cong \triangle A'OB' \\ \angle AOB &= \angle A'OB' \end{aligned}$$

בפרט מתקיים:

בכיוון ההפוך, נניח שמתקיים $\angle AOB = \angle A'OB'$. יחד עם השוויונות (1) נקבל, לפי משפט

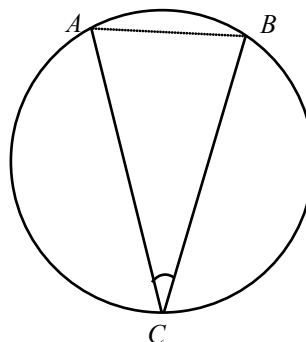
$$\triangle AOB \cong \triangle A'OB' \quad \text{החפיפה צ.צ.}$$

בפרט מתקיים: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ □



זווית היקפית

נתבונן עתה במיתר AB במעגל, ובזווית $\angle ACB = \alpha$ הנוצרת מחיבור שני קצות המיתר לנקודה C שעל המעגל:

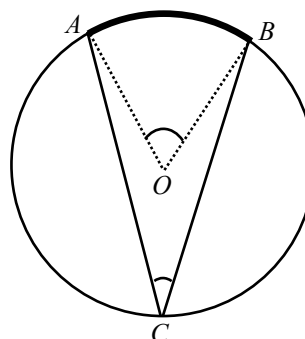


הזווית $\angle ACB$ נקראת **זווית היקפית** הנשענת על המיתר AB .

משפט 8.35

גודלה של זווית היקפית שווה למחצית גודלה של הזווית המרכזית הנשענת על אותו המיתר, ומקצה את הקשת שבתוך הזווית ההיקפית.

נתבונן באיור:



הזווית $\angle AOB$ שבאיור היא הזווית המרכזית המקצה את הקשת $\widehat{AB}$ שבתוך הזווית $\angle ACB$.

$$\angle ACB = \frac{\angle AOB}{2}$$

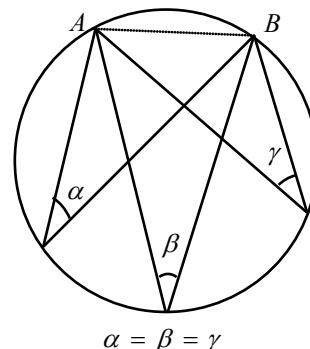
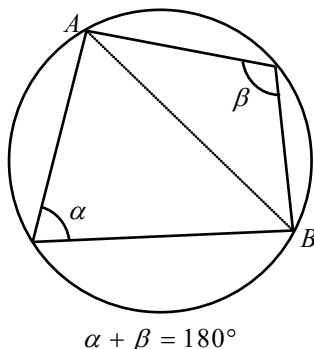
לפי המשפט, מתקיים:

לא נוכיח את המשפט.

מסקנה 8.36

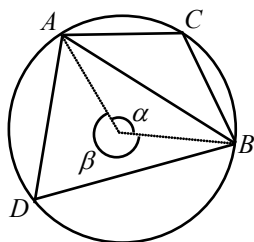
- שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותו המיתר מאותו הצד של המיתר, שוות זו לזו.
- סכום של שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותו המיתר משני צדדיו הוא 180° .

באיור שמימין מוצגות זוויות היקפיות הנשענות על אותו המיתר מצידו האחד. לפי מסקנה 8.36, הן כולן שוות זו לזו. באיור שמאל מוצגות זוויות היקפיות הנשענות על מיתר משני צדדיו; לפי המסקנה סכומן הוא 180° .



הוכחת מסקנה 8.36

א. טענה זו נובעת מיידית ממשפט 8.35, כי כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר AB מאותו צד שוות למחציתה של אותה זווית מרכזית, ולכן שוות זו לזו.



ב. נתבונן בזוויות ההיקפיות $\angle ACB$, $\angle ADB$ שבאיור, ובזוויות המרכזיות המתאימות

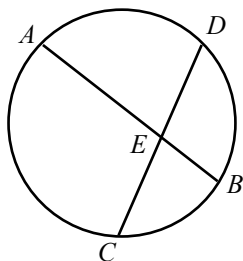
$$\angle ACB = \frac{\beta}{2}, \angle ADB = \frac{\alpha}{2} \quad \text{לפי משפט 8.35 מתקיים:}$$

הזוויות α ו- β מקצות יחדיו קשתות המכסות את המעגל, ולכן $\alpha + \beta = 360^\circ$.

$$\square \quad \angle ACB + \angle ADB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \quad \text{מכאן:}$$

לסיכום, ראינו שיש התאמה בין מיתר, זווית מרכזית הנשענת עליו, וזווית היקפית הנשענת עליו: אורך המיתר קובע את גודל הזווית המרכזית; הזווית המרכזית כפולה בגודלה מהזווית ההיקפית. כמו כן, יש התאמה בין גודל זווית מרכזית לאורך הקשת הנשענת עליה; אורך זה ניתן לחישוב בעזרת הנוסחה שבעמוד 178.

בשאלות הבאות נתרגל את השימוש במשפט 8.35 ובמסקנותיו.



שאלה 33

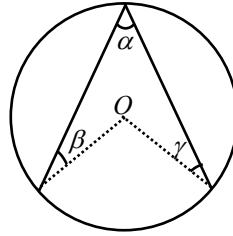
היו AB ו- CD שני מיתרים במעגל, הנחתכים בנקודה E .

$$\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{ED}$$

הוכיחו את השוויון:

רמז: הוכיחו תחילה שמתקיים $\angle AED = \angle CEB$, $\angle ADE = \angle CBE$.

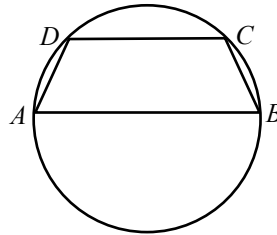
התשובה בעמוד 297



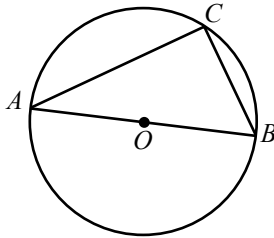
שאלה 34

באיור הבא, הוכיחו שמתקיים $\alpha = \beta + \gamma$:

התשובה בעמוד 297



שאלה 35

באיור הבא, $ABCD$ הוא טרפז ($AB \parallel CD$).
הוכיחו ש- $\overline{AD} = \overline{BC}$.

שאלה 36

הוכיחו את משפט תאלס:

זווית היקפית הנשענת על קוטר היא ישרה.

הדרכה: יהי AB קוטר במעגל, ותהי C נקודה על המעגל. כדי להוכיח ש- $\angle ACB = 90^\circ$,
התבוננו בזווית $\angle AOB$, באשר O הוא מרכז המעגל.

התשובה בעמוד 297

הערה: המשפט שבשאלה קרוי על שמו של המתמטיקאי והפילוסוף היווני תאלס איש מילטוס (ביוונית: Θαλής; 624 לפנה"ס – 546 לפנה"ס בקירוב). יש טענה נוספת הקרויה בשם משפט תאלס, ואותה לא נלמד בשיעור זה.

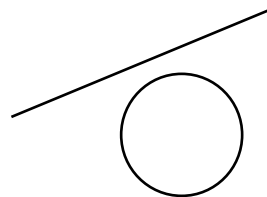
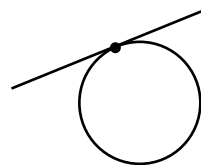
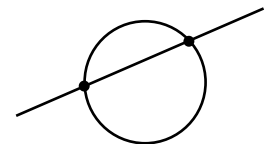
משיק למעגל

המצבים ההדדים האפשריים של ישר ומעגל מתוארים במשפט הבא:

משפט 8.37

ישר ומעגל נחתכים בשתי נקודות לכל היותר.

לפי האמור במשפט, ישר יכול לחתוך מעגל בשתי נקודות, או בנקודה אחת, או שלא לחתוך אותו כלל. מצבים אלה מתוארים באיור הבא:

ללא נקודות
חיתוךנקודת חיתוך
יחידהשתי נקודות
חיתוך

במצב שבו ישר חותך מעגל בנקודה אחת בלבד, נאמר שהישר **משיק** למעגל. במקרה זה, נקודת החיתוך בין הישר והמעגל נקראת **נקודת ההשקה**.

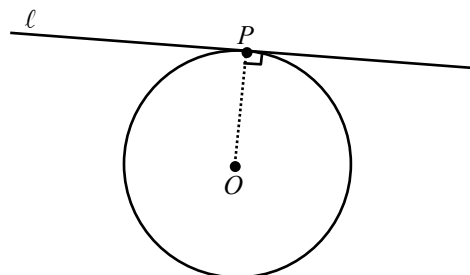
אם נתבונן במקטע קטן של המעגל תחת עדשת המיקרוסקופ, ניוכח שמקטע זה קרוב בצורתו לקו ישר. ככל שנגדיל את עוצמתו של המיקרוסקופ ונתבונן במקטעים קטנים יותר, כך תתקרב צורת המקטע לצורת הקו הישר. אם נקפיד להתמקד בקטעים הולכים וקטנים שבמרכזם נקודה P שבמעגל, ניוכח שהם הולכים ומתקרבים בצורתם לקו ישר, המשיק למעגל בנקודה P .

מתיאור זה נובע השימוש במילה 'משיק'. לא זו בלבד שהישר המשיק נוגע במעגל בנקודה אחת ויחידה, אלא גם שהישר המשיק מבטא את מגמת הקו המעגלי בקרבת הנקודה P . במושגים אלה ניתקל באופן מדויק יותר בשיעור 11.

משפט 8.38

משיק למעגל הוא מאונך לרדיוס אל נקודת ההשקה.

באיור שלפנינו, הישר ℓ משיק למעגל, ונקודת ההשקה היא P . לפי המשפט מתקיים $OP \perp \ell$.



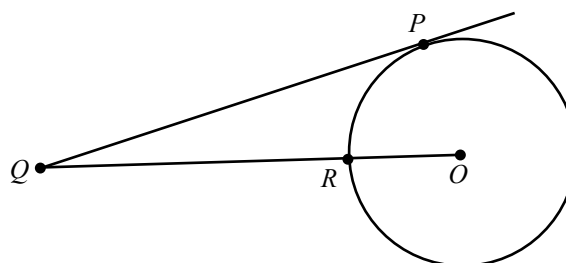
גם הכיוון ההפוך נכון:

משפט 8.39

ישר העובר דרך נקודה שעל מעגל, ומאונך לרדיוס אל נקודה זו, הוא משיק למעגל.

שאלה 37

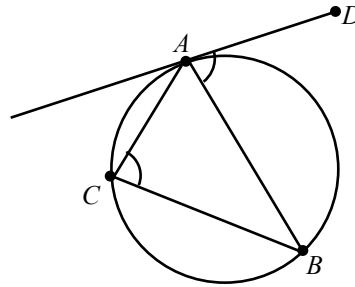
באיור הבא, PQ הוא משיק למעגל. נתון כי $PQ = 3$ ורדיוס המעגל הוא 1. מצאו את QR .



התשובה בעמוד 297

שאלה 38

הישר AD באיור הוא משיק למעגל. הוכיחו: $\angle DAB = \angle ACB$.

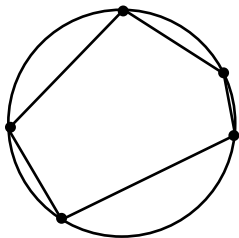


(במילים: הזווית בין מיתר במעגל למשיק למעגל דרך אחד מקצותיו שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני).

התשובה בעמוד 298

מצולע חסום במעגל

מצולע אשר כל קודקודיו נמצאים על מעגל נקרא **מצולע חסום במעגל**. במקרה כזה נאמר **שהמעגל חוסם את המצולע**.
מצולע חסום במעגל הוא בהכרח קמור.



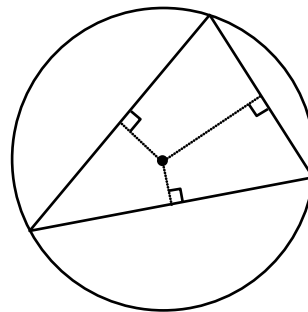
מצולע חסום במעגל

כשהמצולע הוא משולש, מסתבר שתמיד ניתן לחסום אותו במעגל:

משפט 8.40

- א. לכל משולש יש מעגל חוסם יחיד.
ב. מרכז המעגל החוסם הוא נקודת מפגש האנכים האמצעיים של המשולש.

באיור הבא מוצגים משולש, מפגש האנכים האמצעיים, והמעגל החוסם.



הוכחת המשפט מבוססת על הטענה הבאה:

טענה 8.41

האנך האמצעי לקטע AB הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המרוחקות במידה שווה מ- A ומ- B .

הוכחת הטענה

נסמן ב- C את אמצע הקטע AB , ותהי P נקודה על האנך האמצעי ל- AB .

המשולש $\triangle BCP$ הוא ישר-זווית. לפי משפט פיתגורס, מתקיים:

$$\overline{BP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{AC}^2$$

גם המשולש $\triangle ACP$ ישר-זווית, ולכן

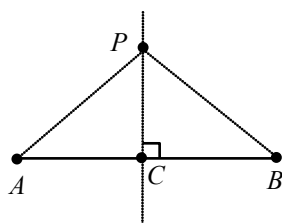
$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$$

מתקיים $\overline{AC} = \overline{BC}$ (לפי הגדרת הנקודה C), ולכן

$$\overline{AP} = \overline{BP}$$

מכאן, היות שמרחקים בין נקודות אינם שליליים:

הוכחנו ש- P נמצאת במרחק שווה מהנקודות A ו- B .



בכיוון ההפוך, נניח ש- P נקודה המקיימת $\overline{AP} = \overline{BP}$. אז המשולש $\triangle ABP$ הוא שווה-שוקיים. PC הוא התיכון לצלע AB . לפי משפט 8.27, הוא גם הגובה לצלע AB , לכן $PC \perp AB$. לפיכך, P נמצאת על האנך האמצעי לקטע AB . $\square$

הוכחת משפט 8.40

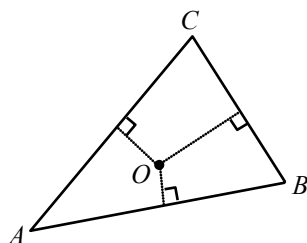
נתבונן במשולש $\triangle ABC$. תהי O נקודת המפגש של האנכים האמצעיים לצלעות AB ו- AC . נסמן: $R = \overline{AO}$.

לפי טענה 8.41, O נמצאת במרחקים שווים מ- A ומ- B , וגם נמצאת במרחקים שווים מ- B ומ- C . לפיכך מתקיים:

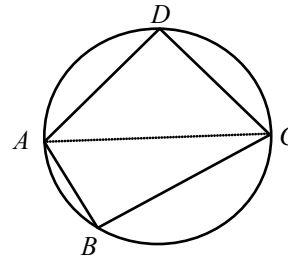
$$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO} = R$$

לכן הנקודות A , B ו- C נמצאות על המעגל שמרכזו בנקודה O ורדיוסו R . מעגל זה הוא, אפוא, מעגל חוסם עבור המשולש $\triangle ABC$.

מעגל זה נקבע ביחידות, כי מרכז המעגל נמצא במרחק שווה משלושת קודקודי המשולש, ולפיכך (שוב לפי טענה 8.41) נמצא בנקודת המפגש האנכים האמצעיים של המשולש. $\square$



נעבור להתבונן על מרובע החסום במעגל:



נשים לב שהזוויות $\angle ABC$, $\angle ADC$ שבאיור נשענות על המיתר AC מצדדים שונים. לפי

מסקנה 8.36, מתקיים: $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

באופן דומה נקבל: $\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

מצאנו, אפוא, כי תנאי הכרחי לכך שמרובע יהיה חסום במעגל הוא שהסכום של כל שתי זוויות נגדיות בו הוא 180° . מסתבר שתנאי זה הוא הכרחי ומספיק:

משפט 8.42

מרובע הוא ניתן לחסימה במעגל אם ורק אם הסכום של כל זוג זוויות נגדיות בו הוא 180° .

שאלה 39

הוכיחו שמקבילית חסומה במעגל היא בהכרח מלבן.

התשובה בעמוד 298

שאלה 40

הוכיחו שבהינתן מרובע קמור, מספיק שהסכום של זוג אחד של זוויות נגדיות בו יהיה 180° כדי שהמרובע יהיה ניתן לחסימה במעגל.

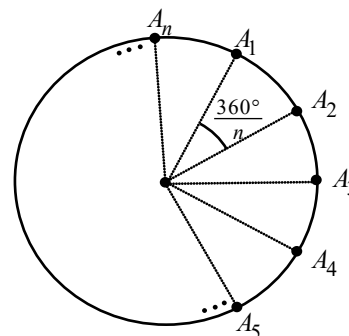
התשובה בעמוד 298

שאלה 41 (*)

א. הוכיחו שכל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל.

הדרכה: התבוננו בשלוש צלעות סמוכות במצולע; הוכיחו ששלושת האנכים האמצעיים שלהן נפגשים בנקודה אחת.

ב. במעגל הוקצו n זוויות מרכזיות בגודל $360^\circ/n$, כמתואר באיור:

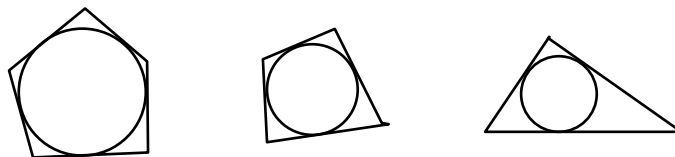


הוכיחו שהנקודות המתקבלות על המעגל הן קודקודיו של מצולע משוכלל חסום במעגל.

התשובה בעמוד 298

מעגל חסום במצולע

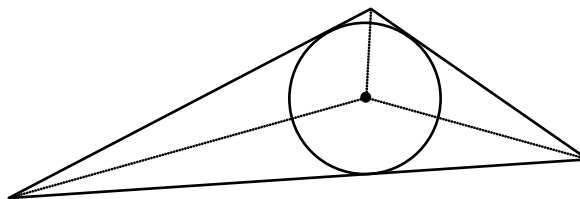
בהינתן מצולע ומעגל, נאמר שהמעגל חסום במצולע (וגם: המצולע חוסם את המעגל) אם כל צלעות המצולע משיקות למעגל.
באיור הבא מודגמים מעגלים חסומים במשולש, במרובע ובמחומש:



משפט 8.43

- בכל משולש יש מעגל חסום יחיד.
- מרכז המעגל החסום הוא נקודת מפגש חוצי הזוויות של המשולש.

באיור הבא מודגמים חוצי הזוויות והמעגל החסום:

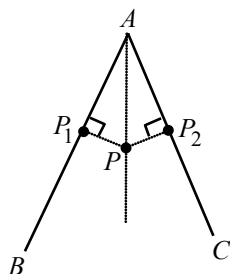


הוכחת המשפט נסמכת על הטענה הבאה:

טענה 8.44

המקום הגיאומטרי של נקודות במשולש $\triangle ABC$ המרוחקות במידה שווה מהצלעות AB ו- AC הוא חוצה הזווית $\angle BAC$.

הוכחת הטענה



נניח ש- P נקודה במשולש המרוחקת במידה שווה מ- AB ומ- AC . נסמן ב- P_1 את עקב האנך מ- P לצלע AB , וב- P_2 את עקב האנך מ- P לצלע AC . לפי ההנחה, מתקיים $\overline{PP_1} = \overline{PP_2}$. כמו כן מתקיים $\angle PP_1A = \angle PP_2A = 90^\circ$. המשולשים $\triangle PP_1A$, $\triangle PP_2A$ הם ישרי-זווית. הצלע PA היא היתר בשני המשולשים, ולכן היא הצלע הגדולה בכל אחד מהם. לפי משפט החפיפה הרביעי, שני משולשים אלה חופפים. לכן מתקיים: $\angle PAP_1 = \angle PAP_2$. מכאן נובע שהנקודה P נמצאת על חוצה הזווית $\angle BAC$. בכיוון ההפוך, אם P נמצאת על חוצה הזווית $\angle BAC$, אז $\angle PAB = \angle PAC$. נסמן את הנקודות P_1, P_2 כמקודם ונקבל ש- $\angle PAP_1 = \angle PAP_2$. כמו כן, $\angle PP_1A = \angle PP_2A = 90^\circ$. מתקיים לכן (מכיוון שסכום הזוויות בכל משולש הוא 180°), $\angle APP_1 = \angle APP_2$. כמו כן מתקיים $\overline{AP} = \overline{AP}$. לפי משפט החפיפה ז.צ.ז., $\triangle PP_1A \cong \triangle PP_2A$. מכאן, $\overline{PP_1} = \overline{PP_2}$. הנקודה P נמצאת, אפוא, במרחקים שווים מ- AB ומ- AC . $\square$

8.43 משפט

נסמן ב- O את נקודת מפגש חוצי הזוויות A ו- B במשולש. לפי טענה 8.44, נמצאת במרחק שווה מהצלעות AB, AC (כי נמצאת על חוצה הזווית A), וגם במרחק שווה מהצלעות AB, BC (כי נמצאת על חוצה הזווית B). מכאן נובע ש- O נמצאת במרחק שווה מכל צלעות המשולש. לכן (לפי טענה 8.44), O נמצאת גם על חוצה הזווית C (ובכך הוכחנו שחוצי הזווית במשולש נפגשים בנקודה אחת).

נסמן ב- P_1, P_2, P_3 את עקבי האנכים מהנקודה O לצלעות $a = BC, b = AC, c = AB$ בהתאמה. נסמן $r = \overline{OP_1} = \overline{OP_2} = \overline{OP_3}$, ולפי מה שהוכחנו מתקיים גם $r = \overline{OP_1} = \overline{OP_2} = \overline{OP_3}$.

נוכיח שהמעגל שמרכזו O ורדיוסו r חסום במשולש $\triangle ABC$: הנקודה P_1 משותפת למעגל ולצלע a , והרדיוס OP_1 מאונך לצלע a . לפי משפט 8.39, הצלע a משיקה למעגל. באופן דומה, ניתן לראות שגם b ו- c משיקות למעגל. לכן המעגל חסום במשולש.

לבסוף, בהינתן מעגל שמרכזו O ורדיוסו r , החסום במשולש, נסמן ב- P_1, P_2, P_3 את נקודות ההשקה של המעגל והצלעות a, b, c . בהתאמה. לפי משפט 8.38, $OP_1 \perp a$. לכן המרחק של O מהצלע a הוא $\overline{OP_1} = r$. באופן דומה ניתן לראות שהמרחק של O מהצלעות b ו- c הוא r . לכן O נמצאת במרחקים שווים מצלעות המשולש, ולפי טענה 8.44, O נמצאת על שלושת חוצי הזווית של המשולש. לפיכך O היא נקודת המפגש של חוצי הזווית במשולש. בכך הראינו שהמעגל החסום במשולש נקבע ביחידות. $\square$

ניתן לחשב את רדיוס המעגל החסום במשולש בעזרת שיקולי שטח:

8.45 משפט

יהי $\triangle ABC$ משולש ששטחו S , היקפו p , ורדיוס המעגל החסום בו הוא r .

$$S = \frac{pr}{2} \quad \text{מתקיים הקשר הבא:}$$

שאלה 42

הוכיחו את משפט 8.45.

רמז: התבוננו במשולשים $\triangle AOB, \triangle AOC, \triangle BOC$ באיור שבהוכחת משפט 8.43.

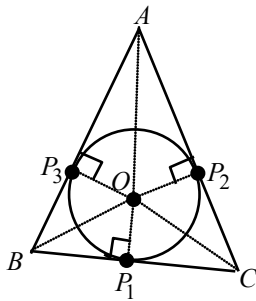
שאלה 43

א. חשבו את רדיוס המעגל החסום במשולש שווה-צלעות שאורך צלעו 1.

ב. חשבו את רדיוס המעגל החסום במשולש ישר-זווית שאורכי ניצביו הם 1 ו-2.

שאלה 44 (*)

הוכיחו שבכל מצולע משוכלל ניתן לחסום מעגל, ושמרכז המעגל החסום במצולע כזה מתלכד עם מרכז המעגל החוסם אותו.



התשובה בעמוד 299

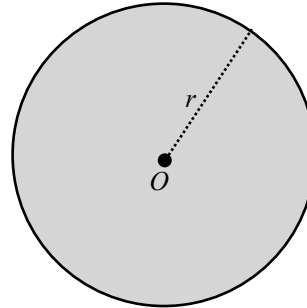
התשובה בעמוד 300

התשובה בעמוד 300

שטח העיגול

כזכור, הצורה הכלואה על ידי מעגל נקראת **עיגול**.

נתבונן בעיגול שרדיוסו r :

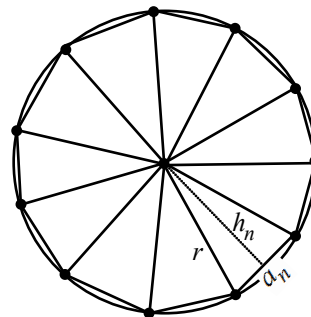


משפט 8.46

שטח עיגול שרדיוסו r הוא πr^2 .

לא נוכיח את המשפט באופן מדויק, אך נכיר הסבר אינטואיטיבי לנכונותו.

נתבונן במצולע משוכלל בעל n צלעות, החסום במעגל בעל רדיוס r :



צלעות המצולע, יחד עם הרדיוסים אל קודקודיו, יוצרות n משולשים חופפים. נסמן ב- a_n את אורך הצלע של המצולע, וב- h_n את הגובה ממרכז המעגל אל כל אחת מצלעות המצולע. שטח כל משולש הוא $\frac{1}{2}a_n h_n$, ולכן שטח המצולע (המורכב, כאמור, מ- n משולשים חופפים) הוא $\frac{1}{2}na_n h_n$.

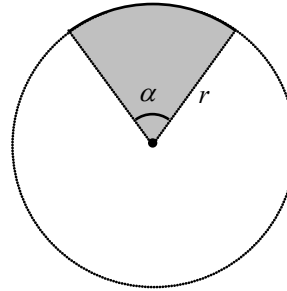
נסמן $P_n = na_n$. מספר זה הוא היקף המצולע. שטח המצולע הוא, אפוא, $\frac{1}{2}P_n h_n$. ככל ש- n , מספר הצלעות במצולע, גדל, ההיקף P_n הולך ומתקרב להיקף המעגל, שהוא $2\pi r$, והגובה h_n הולך ומתקרב לרדיוס המעגל, שהוא r . שטח המצולע מתקרב, לפיכך, אל המספר

$$\frac{1}{2}2\pi r \cdot r = \pi r^2$$

מאידך, שטח המצולע הולך ומתקרב אל שטח המעגל, ולכן שטח המעגל הוא πr^2 .

שטח של גיזרה מעגלית

נתבונן עתה בחלק של עיגול בעל רדיוס r , הכלוא על ידי זווית מרכזית שגודלה α .



צורה זו נקראת **גיזרה מעגלית**. שטח הגיזרה מתקבל מהכפלת שטח העיגול בחלק היחסי של הזווית α בתוך זווית של 360° המכסה את המעגל השלם:

משפט 8.47

השטח של גיזרה מעגלית הכלואה בתוך עיגול שרדיוסו r על ידי זווית שגודלה α מעלות

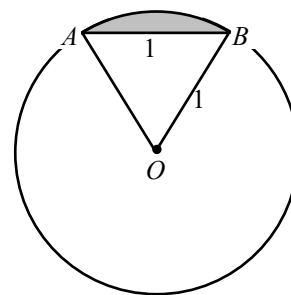
$$\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

הוא:

נדגים את השימוש בנוסחאות שפותחו:

א. נתבונן בעיגול שרדיוסו 2 ס"מ. שטח העיגול הינו: $\pi \cdot 2^2 = 4\pi \approx 12.57$ כלומר, כ-12.57 סמ"ר.

ב. נתבונן בצורה המסומנת באיור הבא:



$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = 1$$

רדיוס המעגל הוא 1 ולכן

המשולש $\triangle AOB$ הוא שווה-צלעות ולכן כל זוויותיו הן 60° .

הצורה המסומנת, יחד עם המשולש $\triangle AOB$, מרכיבות אפוא גיזרה מעגלית המתאימה לזווית של 60° . שטח הגיזרה הינו:

$$\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{60}{360} = \frac{\pi}{6}$$

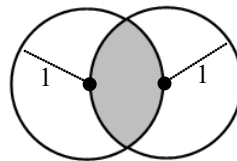
שטח המשולש $\triangle AOB$ הוא (כפי שראינו בעמוד 170) $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
נשמך את שטח הצורה המסומנת ב- S . מהאמור לעיל נובע:

$$S + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6}$$

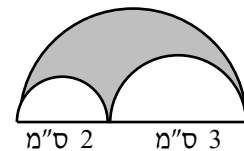
$$\Rightarrow S = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \approx 0.09$$

שאלה 45

חשבו את שטחי הצורות האפורות שבאיורים הבאים:



ב.



א.

התשובה בעמוד 301

סיכום שיעור 8

בשיעור זה התוודענו אל מושגי היסוד של הגיאומטריה האוקלידית, ואל הכלים הבסיסיים להוכחת טענות במסגרתה. הכרנו אובייקטים גיאומטריים כגון נקודה, ישר, מצולע ומעגל. למדנו על חפיפה ודמיון של משולשים, על היקף ושטח והדרכים לחשבם.

המשולש התגלה כאובייקט בסיסי, מינימליסטי, שהבנת תכונותיו היא מפתח לפתרון של בעיות רבות. לכן הוקדשה לו תשומת לב רבה.

הכרנו גם מושגים הקשורים למעגל, כגון מיתר, משיק, זוויות מרכזיות והיקפיות, ומעגלים חוסמים וחסומים.

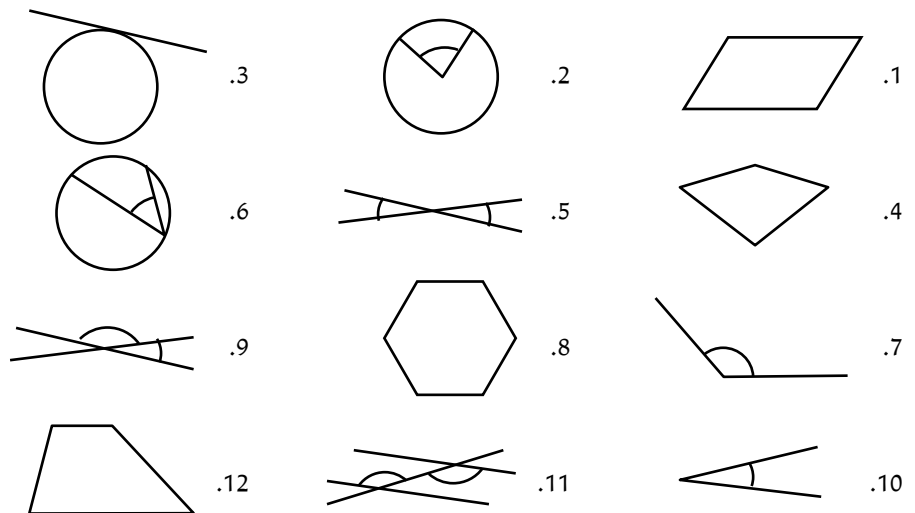
במעבר המהיר שלנו על נושא הגיאומטריה, קרענו צוהר לתחום רחב ועשיר, ובו פנינים רבות ממיטב היצירה האנושית. למרות המסע המהיר, יש לקוות שהתרשמתם מהיופי והאלגנטיות שבתחום זה.

שאלות להערכה עצמית

שאלה 46

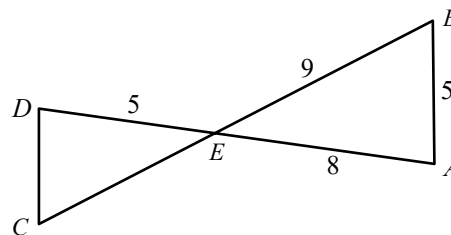
מצאו את האיור המתאים למושג:

- א. זווית מרכזית ב. זווית קהה ג. דלתון
 ד. זווית חדה ה. זוויות משלימות ו. זווית היקפית
 ז. זוויות מתחלפות ח. מצולע משוכלל ט. משיק
 י. מקבילית יא. טרפז יב. זוויות קודקדיות



התשובה בעמוד 301

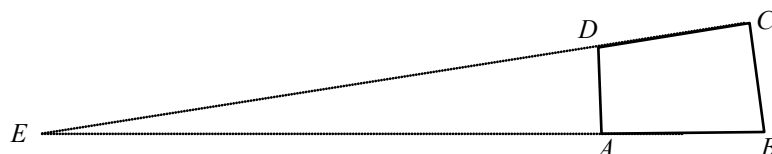
שאלה 47

באיור הבא נתון ש- $AB \parallel CD$:חשבו את $\overline{DC}$ ו- $\overline{CE}$.

התשובה בעמוד 302

שאלה 48

המרובע $ABCD$ שבאיור ניתן לחסימה במעגל. הנקודה E היא חיתוך המשכי הצלעות AB ו- CD . הוכיחו: $\triangle EAD \sim \triangle ECB$.



התשובה בעמוד 302

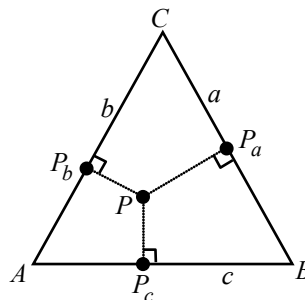
שאלה 49

יהיו $\triangle ABC$ ו- $\triangle A'B'C'$ משולשים דומים, ויהי λ יחס הדמיון ביניהם:
 $\overline{AB}/\overline{A'B'} = \overline{AC}/\overline{A'C'} = \overline{BC}/\overline{B'C'} = \lambda$. הוכיחו שהיקפו של $\triangle ABC$ גדול פי λ מהיקפו של $\triangle A'B'C'$, ושטחו של $\triangle ABC$ גדול פי λ^2 משטחו של $\triangle A'B'C'$.

התשובה בעמוד 302

שאלה 50

יהי $\triangle ABC$ משולש שווה-צלעות שאורך צלעו 5. תהי P נקודה בתוך המשולש, ונסמן ב- P_a, P_b, P_c את היטלי הנקודה P על הצלעות a, b, c בהתאמה. הוכיחו שסכום המרחקים $\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c}$ אינו תלוי במיקום הנקודה P , וחשבו סכום זה.



הדרכה: התבוננו בשטחי המשולשים $\triangle APB, \triangle APC, \triangle BPC$.

התשובה בעמוד 303

שאלה 51

יהי $\triangle ABC$ משולש ישר-זווית ($\angle A = 90^\circ$), ויהי AP הגובה ליתר. א. הוכיחו שהמשולשים $\triangle ABC, \triangle ABP, \triangle ACP$ דומים זה לזה (לא בהכרח ביחס לסדר הקודקודים שצוין).

ב. הוכיחו: $\overline{AP} = \sqrt{\overline{BP} \cdot \overline{CP}}$.

התשובה בעמוד 303

שאלה 52

א. הוכיחו שאם משולש ישר-זווית חסום במעגל, אז יתר המשולש הוא קוטר במעגל.
 ב. הוכיחו שבמשולש ישר-זווית, התיכון ליתר שווה באורכו למחצית אורך היתר.

התשובה בעמוד 304

שאלה 53

הוכיחו שמרובע שאלכסוניו מאונכים, ואחד האלכסונים בו חוצה את רעהו, הוא דלתון.
 (הערה: בשאלה 20 הוכחנו את הכיוון ההפוך לטענה זו).

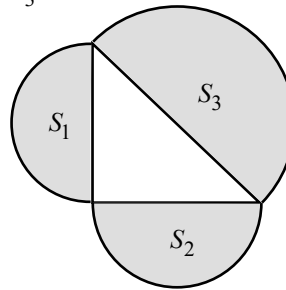
התשובה בעמוד 304

שאלה 54

על צלעותיו של משולש ישר-זווית סומנו חצאי עיגולים כמתואר באיור.

הוכיחו ששטחי חצאי העיגולים מקיימים:

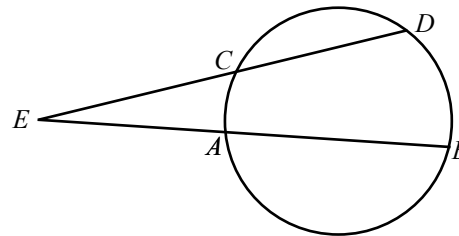
$$S_1 + S_2 = S_3$$



התשובה בעמוד 305

שאלה 55

מהנקודה E שמחוץ למעגל יוצאות שתי קרניים הנחתכות עם המעגל בנקודות A, B, C, D , כמתואר באיור:



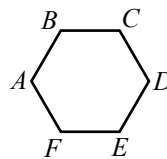
$$\overline{EA} \cdot \overline{EB} = \overline{EC} \cdot \overline{ED}$$

הוכיחו את השוויון:

התשובה בעמוד 305

שאלה 56

יהי $ABCDEF$ משושה משוכלל:



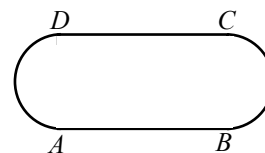
מצאו את הזוויות $\angle BDC, \angle BDE, \angle BED$.

הדרכה: חסמו את המשושה במעגל, והתבוננו ברדיוסים ממרכז המעגל אל הקודקודים.

התשובה בעמוד 305

שאלה 57

מסלול באצטדיון אתלטיקה מתוכנן להיבנות בצורה הבאה:



הנקודות A, B, C, D הן קודקודיו של מלבן, והקשתות $\widehat{BC}$, $\widehat{DA}$ הן חצאי מעגלים.

א. אורך המקטע AB מתוכנן להיות 80 מטרים. מה צריך להיות רוחב המגרש, $\overline{AD}$, כדי

שהקפה מלאה של המסלול תהיה באורך של 400 מטרים בדיוק?

ב. לפי הנתונים שחושבו בסעיף הקודם, מה יהיה שטחו של המגרש שבתוך המסלול?

התשובה בעמוד 306

סיכום הטענות והמשפטים בשיעור 8

8.1 אקסיומה

בהינתן זוג ישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 , תיתכנה שלוש אפשרויות:

א. הישרים מתלכדים: $\ell_1 = \ell_2$.

ב. הישרים מקבילים: $\ell_1 \parallel \ell_2$.

ג. הישרים נחתכים בנקודה אחת בדיוק.

8.2 אקסיומה

בהינתן שתי נקודות שונות זו מזו, A ו- B , קיים קו ישר אחד ויחיד העובר דרך שתיהן.

8.3 אקסיומה (אקסיומת המקבילים)

בהינתן ישר ℓ ונקודה A שאינה על הישר, קיים ישר יחיד m העובר דרך הנקודה A ומקביל לישר ℓ .

8.4 משפט

זוויות קודקודיות הן שוות זו לזו.

8.5 משפט

שני ישרים, המקבילים לישר שלישי, הם זהים או מקבילים.

8.6 מסקנה

בהינתן שני ישרים מקבילים $\ell_1 \parallel \ell_2$, כל ישר הנחתך עם ℓ_1 נחתך גם עם ℓ_2 .

8.7 משפט

זוויות מתאימות הנוצרות בין שני ישרים מקבילים הן שוות זו לזו.

8.8 משפט

זוויות מתחלפות הנוצרות בין שני ישרים מקבילים הן שוות זו לזו.

8.9 משפט

הסכום של שתי זוויות חד-צדדיות בין ישרים מקבילים הוא 180° .

8.10 משפט

אם מתקיים שוויון של זוויות מתאימות בין הישרים ℓ_1 ו- ℓ_2 , ביחס לישר החותך אותם, או שוויון של זוויות מתחלפות, או שסכום של זוויות חד-צדדיות הוא 180° , אז $\ell_1 \parallel \ell_2$ או $\ell_1 = \ell_2$.

משפט 8.11

סכום הזוויות בכל משולש הוא 180° .

משפט 8.12 (אי־שוויון המשולש)

האורך של כל צלע במשולש קטן מסכום אורכי הצלעות האחרות.

משפט 8.13

אם a, b, c הם מספרים ממשיים חיוביים שכל אחד מהם קטן מסכום שני האחרים, אז ניתן לבנות משולש שאורכי צלעותיו הם a, b, c .

משפט 8.14

מצולע הוא קמור אם ורק אם לכל שתי נקודות במצולע, הקטע המחבר ביניהן נמצא במצולע.

משפט 8.15

כל המשולשים הם קמורים.

משפט 8.16

סכום הזוויות במצולע קמור בעל n צלעות הוא $180(n - 2)$ מעלות.

משפט 8.17 (משפט החפיפה הראשון)

שני משולשים, השווים באורכי שתי צלעות, ובזווית הכלואה ביניהן, הם חופפים.

משפט 8.18 (משפט החפיפה השני)

שני משולשים, השווים בגודלי שתי זוויות, ובאורך הצלע שביניהן, הם חופפים.

משפט 8.19 (משפט החפיפה השלישי)

שני משולשים השווים באורכי צלעותיהם הם חופפים.

משפט 8.20 (משפט החפיפה הרביעי)

שני משולשים השווים באורכי שתי צלעות ובזווית שממול לצלע הגדולה מביניהן, חופפים.

משפט 8.21

במשולש, אשר כל צלעותיו שוות זו לזו, שוות גם כל הזוויות זו לזו.

משפט 8.22

במשולש שווה־שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.

משפט 8.23

אם שתי זוויות במשולש שוות זו לזו בגודלן, אז הצלעות שמולן שוות זו לזו באורכן.

מסקנה 8.24

משולש הוא שווה-שוקיים אם ורק אם שתיים מזוויותיו שוות זו לזו.

משפט 8.25

יהי ℓ ישר ותהי P נקודה. אז יש ישר יחיד העובר דרך P ומאונך ל- ℓ .

משפט 8.25

שלושת הגבהים במשולש (או המשכיהם) נפגשים בנקודה אחת.

משפט 8.26

בכל משולש:

- שלושת התיכונים נפגשים בנקודה אחת (נקודה זו נקראת **מרכז הכובד** של המשולש).
- שלושת חוצי הזוויות נפגשים בנקודה אחת.
- שלושת האנכים האמצעיים נפגשים בנקודה אחת.

משפט 8.27

יהי $\triangle ABC$ משולש שווה-שוקיים: נניח ש- $\overline{AB} = \overline{AC}$. אז הגובה, התיכון וחוצה הזווית היוצאים מהנקודה A , מתלכדים.

משפט 8.28 (משפט פיתגורס)

במשולש ישר-זווית, ריבוע אורך היתר שווה לסכום ריבועי אורכי הניצבים:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

משפט 8.29 (נוסחת הרון)

בהינתן משולש שאורכי צלעותיו הם a, b, c , נגדיר: $p = (a + b + c)/2$.
 שטח המשולש הוא: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

משפט 8.30

בהינתן המשולשים $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

א. אם מתקיים שוויון יחסי הצלעות:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B', \angle C = \angle C'$$

ב. אם מתקיים שוויון הזוויות:

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

משפט 8.31

היקף מעגל שרדיוסו r הוא $2\pi r$.

משפט 8.32

אורך הקשת במעגל שרדיוסו r , המוקצית על ידי זווית מרכזית בגודל α מעלות, הוא

$$2\pi r \frac{\alpha}{360^\circ}$$

משפט 8.33

א. כל מיתר במעגל נמצא בתוך המעגל.

ב. המיתרים הארוכים ביותר במעגל הם הקטרים.

משפט 8.34

יהיו AB ו- $A'B'$ שני מיתרים במעגל. אז $\overline{AB} = \overline{A'B'}$ אם ורק אם $\angle AOB = \angle A'O'B'$.

משפט 8.35

גודלה של זווית היקפית שווה למחצית גודלה של הזווית המרכזית הנשענת על אותו המיתר, ומקצה את הקשת שבתוך הזווית ההיקפית.

מסקנה 8.36

א. שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותו המיתר מאותו הצד של המיתר, שוות זו לזו.

ב. סכום של שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותו המיתר משני צדדיו הוא 180° .

משפט 8.37

ישר ומעגל נחתכים בשתי נקודות לכל היותר.

משפט 8.38

משיק למעגל הוא מאונך לרדיוס אל נקודת ההשקה.

משפט 8.39

ישר העובר דרך נקודה שעל מעגל, ומאונך לרדיוס אל נקודה זו, הוא משיק למעגל.

משפט 8.40

א. לכל משולש יש מעגל חוסם יחיד.

ב. מרכז המעגל החוסם הוא נקודת מפגש האנכים האמצעיים של המשולש.

טענה 8.41

האנך האמצעי לקטע AB הוא המקום הגיאומטרי של כל הנקודות המרוחקות במידה שווה

מ- A ומ- B .

משפט 8.42

מרובע הוא ניתן לחסימה במעגל אם ורק אם הסכום של כל זוג זוויות נגדיות בו הוא 180° .

משפט 8.43

- א. בכל משולש יש מעגל חסום יחיד.
- ב. מרכז המעגל החסום הוא נקודת מפגש חוצי הזוויות של המשולש.

טענה 8.44

המקום הגיאומטרי של נקודות במשולש $\triangle ABC$ המרוחקות במידה שווה מהצלעות AB ו- AC הוא חוצה הזווית $\angle BAC$.

משפט 8.45

יהי $\triangle ABC$ משולש ששטחו S , היקפו p , ורדיוס המעגל החסום בו הוא r .

$$S = \frac{pr}{2} \quad \text{מתקיים הקשר הבא:}$$

משפט 8.46

שטח עיגול שרדיוסו r הוא πr^2 .

משפט 8.47

השטח של גיזרה מעגלית הכלואה בתוך עיגול שרדיוסו r על ידי זווית שגודלה α מעלות

$$\pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ} \quad \text{הוא:}$$

פתרונות לשאלות בשיעור 5

השאלה בעמוד 11

תשובה 1

א. נתונה הסדרה $a_i = 3i + 1 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

נחשב את איברי הסדרה:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \cdot 1 + 1 = 4; & a_2 &= 3 \cdot 2 + 1 = 7; & a_3 &= 3 \cdot 3 + 1 = 10; \\ a_4 &= 3 \cdot 4 + 1 = 13; & a_5 &= 3 \cdot 5 + 1 = 16 \end{aligned}$$

הסדרה היא: 4, 7, 10, 13, 16

ב. נתונה הסדרה $b_i = i^2 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$

נחשב את איברי הסדרה:

$$\begin{aligned} b_1 &= 1^2 = 1; & b_2 &= 2^2 = 4; & b_3 &= 3^2 = 9; \\ b_4 &= 4^2 = 16; & b_5 &= 5^2 = 25 \end{aligned}$$

הסדרה היא: 1, 4, 9, 16, 25

ג. נתונה הסדרה $c_j = 2^j \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$

נחשב את איברי הסדרה:

$$\begin{aligned} c_1 &= 2^1 = 2; & c_2 &= 2^2 = 4; & c_3 &= 2^3 = 8; \\ c_4 &= 2^4 = 16; & c_5 &= 2^5 = 32 \end{aligned}$$

הסדרה היא: 2, 4, 8, 16, 32

ד. נתונה הסדרה $d_j = (-1)^j \quad 1 \leq j \leq 6$

נחשב את איברי הסדרה:

$$\begin{aligned} d_1 &= (-1)^1 = -1; & d_2 &= (-1)^2 = 1; & d_3 &= (-1)^3 = -1; \\ d_4 &= (-1)^4 = 1; & d_5 &= (-1)^5 = -1; & d_6 &= (-1)^6 = 1 \end{aligned}$$

הסדרה היא: -1, 1, -1, 1, -1, 1

השאלה בעמוד 13

תשובה 2

א. $\sum_{i=1}^4 (3i) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 3 + 6 + 9 + 12 = 30$

ב. $\sum_{j=0}^5 (j^2 + 1) = (0^2 + 1) + (1^2 + 1) + (2^2 + 1) + (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1)$

$$= 1 + 2 + 5 + 10 + 17 + 26 = 61$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=-2}^3 (k^2 - k) &= ((-2)^2 - (-2)) + ((-1)^2 - (-1)) + (0^2 - 0) \\ &\quad + (1^2 - 1) + (2^2 - 2) + (3^2 - 3) \\ &= 6 + 2 + 0 + 0 + 2 + 6 = 16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 (a + bi) &= (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) \\ &= (a + a + a + a) + (b + 2b + 3b + 4b) = 4a + 10b\end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^4 \frac{1}{i} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{12 + 6 + 4 + 3}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$$

השאלה בעמוד 14

תשובה 3

לפי חוקי הסכום המרובה, ניתן לפצל את הסכום כך: $\sum_{i=1}^{100} a_i$

$$\sum_{i=1}^{100} a_i = \sum_{i=1}^{10} a_i + \sum_{i=11}^{100} a_i$$

$$\sum_{i=1}^{100} a_i - \sum_{i=1}^{10} a_i = \sum_{i=11}^{100} a_i$$

נעביר אגפים ונקבל:

השאלה בעמוד 16

תשובה 4

$$\prod_{i=1}^3 i^2 = 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 = 1 \cdot 4 \cdot 9 = 36$$

$$\prod_{i=2}^4 \left(1 - \frac{1}{i}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\prod_{i=1}^{100} (i - 5)$$

ג. נתבונן במכפלה:

עבור $i = 5$, הביטוי $i - 5$ מתאפס, לכן אחד הגורמים במכפלה הוא 0. מכאן שהמכפלה כולה שווה ל-0.

$$\prod_{i=1}^3 i! = 1! \cdot 2! \cdot 3! = 1 \cdot 2 \cdot 6 = 12$$

השאלה בעמוד 16

תשובה 5

לפי הגדרת העצרת:

$$(n+1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot (n+1) = (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) \cdot (n+1) = n! \cdot (n+1)$$

$$(n+1)! = 1! = 1, \quad (n+1)n! = 1 \cdot 0! = 1$$

עבור $n = 0$ מתקיים:

לכן הזהות $(n+1)! = (n+1)n!$ נכונה גם לערך זה.

השאלה בעמוד 17

תשובה 6

א. נתון: $a_1 = 5$, $a_{10} = 32$.

לפי נוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית, מתקיים

$$a_{10} = a_1 + (10 - 1)d = a_1 + 9d$$

$$5 + 9d = 32$$

לכן

$$\Rightarrow 9d = 27 \Rightarrow d = 3$$

הפרש הסדרה הוא 3.

ב. נסמן ב- n את מספר איברי הסדרה. האיבר האחרון בסדרה הוא, לפיכך, a_n .

נתון כי $a_1 = 11$, $a_n = -3$ ו- $d = -2$.

לפי נוסחת האיבר הכללי:

$$-3 = 11 + (n - 1) \cdot (-2)$$

$$\Rightarrow 11 - 2(n - 1) = -3 \Rightarrow 11 - 2n + 2 = -3 \Rightarrow 13 - 2n = -3 \Rightarrow 2n = 16$$

$$\Rightarrow n = 8$$

בסדרה יש שמונה איברים.

השאלה בעמוד 19

תשובה 7

א. נתבונן בסדרה: $1, 3, 5, 7, \dots, 99$. סדרה זו היא סדרה חשבונית, והפרשה הוא 2.

נמצא את מספר איברי הסדרה, n : לפי נוסחת האיבר הכללי,

$$99 = 1 + (n - 1) \cdot 2 \Rightarrow 2(n - 1) = 98 \Rightarrow n - 1 = 49 \Rightarrow n = 50$$

לפי נוסחת הסכום:

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 99 = 50 \cdot \frac{1 + 99}{2} = 50^2 = 2500$$

ב. נתבונן בסדרה: $3, 7, 11, 15, \dots, 75$. סדרה זו היא סדרה חשבונית, והפרשה הוא 4.

נמצא את מספר איברי הסדרה, n : לפי נוסחת האיבר הכללי,

$$75 = 3 + (n - 1) \cdot 4 \Rightarrow 4(n - 1) = 72 \Rightarrow n - 1 = 18 \Rightarrow n = 19$$

לפי נוסחת הסכום:

$$3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 75 = 19 \cdot \frac{3 + 75}{2} = 19 \cdot 39 = 741$$

ג. המספרים בין 1 ל-1000 שספרת היחידות שלהם היא 7 הם:

$$7, 17, 27, 37, \dots, 997$$

מספרים אלה יוצרים סדרה חשבונית שהפרשה הוא 10. נחשב את מספר איברי הסדרה:

$$7 + 10(n - 1) = 997 \Rightarrow 10(n - 1) = 990 \Rightarrow n - 1 = 99 \Rightarrow n = 100$$

סכום הסדרה הוא:

$$7 + 17 + 27 + \dots + 997 = 100 \cdot \frac{997 + 7}{2} = 100 \cdot 502 = 50200$$

השאלה בעמוד 19

תשובה 8

א. נתון:

$$S = 258, d = 3, a_1 = 5$$

לפי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

$$(1) \quad S = n \cdot \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} = \frac{n(2a_1 - d + nd)}{2}$$

$$\frac{n(2 \cdot 5 - 3 + 3n)}{2} = 258$$

נציב את הנתונים:

$$\Rightarrow \frac{n(7 + 3n)}{2} = 258 \Rightarrow 3n^2 + 7n = 516 \Rightarrow 3n^2 + 7n - 516 = 0$$

נפתור את המשוואה הריבועית:

$$\Rightarrow n = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 + 12 \cdot 516}}{6} = \frac{-7 \pm \sqrt{6241}}{6} = \frac{-7 \pm 79}{6}$$

$$\Rightarrow n = -\frac{43}{3} \text{ או } n = 12$$

מבין שני הפתרונות, רק הפתרון $n = 12$ אפשרי, כי n הוא מספר טבעי.

לכן יש בסדרה 12 איברים.

ב. נתון:

$$S = 715, d = -7, a_1 = 100$$

נציב בזהות (1) שפותחה בסעיף א:

$$\frac{n(2 \cdot 100 - (-7) - 7n)}{2} = 715$$

$$\Rightarrow \frac{n(207 - 7n)}{2} = 715 \Rightarrow 207n - 7n^2 = 1430$$

$$\Rightarrow 7n^2 - 207n + 1430 = 0$$

$$\Rightarrow n = \frac{207 \pm \sqrt{207^2 - 28 \cdot 1430}}{14} = \frac{207 \pm \sqrt{2809}}{14} = \frac{207 \pm 53}{14}$$

$$\Rightarrow n = \frac{130}{7} = 18\frac{4}{7} \text{ או } n = 11$$

מבין שני הפתרונות, רק הפתרון $n = 11$ אפשרי, כי n הוא מספר טבעי.

לכן יש בסדרה 11 איברים.

ג. נתון:

$$S = 31.5, n = 9, a_1 = 1$$

לפי נוסחת הסכום,

$$S = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

נציב את הנתונים:

$$9 \cdot \frac{2 \cdot 1 + (9-1)d}{2} = 31.5$$

$$\Rightarrow 9(8d + 2) = 63 \Rightarrow 8d + 2 = 7 \Rightarrow 8d = 5 \Rightarrow d = \frac{5}{8}$$

הפרש הסדרה הוא $5/8$.

תשובה 9

נסמן ב- $a_1, a_2, a_3, \dots$ את סכום הקנס עבור יום האיחור הראשון, השני, השלישי, וכן הלאה. נסמן ב- n את מספר היום הראשון שבו הקנס עבר את רף מאה השקלים. לפי נתוני הבעיה: $a_1, a_2, \dots, a_n$ היא סדרה חשבונית. $a_1 = 1$, $d = 0.1$, n הוא הערך הקטן ביותר שעבורו $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n > 100$. לפי נוסחת הסכום:

$$S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2} = \frac{n(2 + 0.1(n-1))}{2}$$

נפתור את האי-שוויון $S_n > 100$:

$$\begin{aligned} S_n > 100 &\Leftrightarrow \frac{n(2 + 0.1(n-1))}{2} > 100 \Leftrightarrow n\left(2 + \frac{n-1}{10}\right) > 200 \\ &\Leftrightarrow n(20 + n - 1) > 2000 \Leftrightarrow 19n + n^2 > 2000 \\ &\Leftrightarrow n^2 + 19n - 2000 > 0 \end{aligned}$$

לצורך כך נמצא את פתרונות המשוואה $x^2 + 19x - 2000 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{19^2 + 4 \cdot 2000}}{2} = \frac{-19 \pm \sqrt{8361}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-19 - \sqrt{8361}}{2} \approx -55.22, \quad x_2 = \frac{-19 + \sqrt{8361}}{2} \approx 36.22$$

לפי נוסחת הפירוק של ביטוי ריבועי: $x^2 + 19x - 2000 = (x - x_1)(x - x_2)$

מניתוח סימן המכפלה מתקבל: $x^2 + 19x - 2000 > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ או $x > x_2$

לכן: $S_n > 100 \Leftrightarrow n^2 + 19n - 2000 > 0 \Leftrightarrow n < x_1$ או $n > x_2$

n הוא מספר טבעי, ובפרט חיובי, ולכן $n > x_2 \approx 36.22$. הערך השלם הקטן ביותר המקיים זאת הוא $n = 37$.

לכן אחרי 37 ימים יעבור החוב בפעם הראשונה את רף מאה השקלים.

נוודא זאת: הקנס כעבור 37 ימים הוא $1 + 0.1 \cdot (37 - 1) = 1 + 3.6 = 4.6$

הקנס שהצטבר בימים 1-37 הוא $37 \cdot \frac{1 + 4.6}{2} = 37 \cdot 2.8 = 103.6$

כלומר: ביום ה-37 הקנס הגיע ל-103.6 שקלים ושישים אגורות. ביום זה הקנס היה 4.6 שקלים, לכן ביום ה-36 הקנס היה 99 שקלים ועדיין לא עבר את רף מאה השקלים.

השאלה בעמוד 21

תשובה 10

בכל אחת מהסדרות נחשב את היחס בין שני איברים סמוכים, a_{n+1}/a_n . אם היחס קבוע (כלומר לא תלוי ב- n) אז הסדרה היא הנדסית, ויחס זה הוא מנתה. אם היחס אינו קבוע אז הסדרה אינה הנדסית.

א. הסדרה 1, 2, 3: $2/1 \neq 3/2$, לכן הסדרה אינה הנדסית.

ב. הסדרה 1, 2, 4, 8 היא סדרה הנדסית, ומנתה היא 2: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$

ג. הסדרה 0.375, 0.75, 1.5, 3 היא סדרה הנדסית, ומנתה היא 1/2:

$$\frac{1.5}{3} = \frac{0.75}{1.5} = \frac{0.375}{0.75} = \frac{1}{2}$$

ד. הסדרה -8, -4, -2, 1 היא סדרה הנדסית, ומנתה היא -2:

$$\frac{-2}{1} = \frac{4}{-2} = \frac{-8}{4} = -2$$

ה. הסדרה 5, 5, 5, 5 היא סדרה הנדסית, ומנתה היא 1.

ו. הסדרה 0, 0, 0, 0 אינה סדרה הנדסית: המנה a_{n+1}/a_n אינה מוגדרת כלל.

השאלה בעמוד 21

תשובה 11

אם בתחילת חודש מסוים החוב של דנה הוא a שקלים, במהלך החודש נצברת ריבית בסך 10% מהחוב a , כלומר $a/10$. ריבית זו נוספת לחוב הקיים, ולכן בתחילת החודש הבא החוב הוא $a + a/10 = 1.1a$.

נסמן: $q=1.1$, ונסמן ב- a_n את החוב של דנה בתחילת החודש ה- n .

לפי נתוני הבעיה, $a_1 = 1000$. לפי מה שראינו, $a_{n+1}/a_n = 1.1$ ולכן הסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ היא סדרה הנדסית עם מנה q .

לפי נוסחת האיבר הכללי, $a_n = a_1 q^{n-1} = 1000 \cdot (1.1)^{n-1}$

לאחר שישה חודשים, כלומר בתחילת החודש השביעי, החוב של דנה יהיה

$$a_7 = a_1 q^{7-1} = 1000 \cdot (1.1)^6 \approx 1771.5$$

כלומר, כ-1771 שקלים וחמישים אגורות.

השאלה בעמוד 24

תשובה 12

א. נתבונן בסדרה: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{2^{10}}$

כל איבר בה הוא מחצית מקודמו. לכן הסדרה היא סדרה גיאומטרית, עם מנה 1/2.

בסדרה יש 11 איברים. נציב בנוסחת הסכום $a_1 = 1, q = 1/2, n = 11$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1 - \frac{1}{2^{11}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right) = 2 - \frac{1}{2^{10}}$$

ב. נתבונן בסדרה: $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots, \frac{1}{3^{10}}$

כל איבר בסדרה מתקבל מקודמו על ידי הכפלה ב- $-\frac{1}{3}$. לכן הסדרה היא סדרה גיאומטרית, ומנתה היא $-\frac{1}{3}$. בסדרה יש 11 איברים. נציב בנוסחת הסכום $a_1 = 1, q = -\frac{1}{3}, n = 11$

$$\begin{aligned} (-1/3)^{11} &= ((-1) \cdot 1/3)^{11} < \\ &= (-1)^{11} \cdot (1/3)^{11} = -(1/3)^{11} \\ &= -1/3^{11} \end{aligned} \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{1}{3^{10}} = 1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^{11} - 1}{\left(-\frac{1}{3}\right) - 1} = \frac{\frac{-1}{3^{11}} - 1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \left(1 + \frac{1}{3^{11}}\right)$$

השאלה בעמוד 24

תשובה 13

נסמן ב- a_n את החוב בתחילת החודש ה- n . נסמן $q = 1 + r$. בהינתן סכום חוב של M שקלים, ריבית בשיעור r מתוך סכום זה שווה ל- rM שקלים, ולאחר הוספת סכום הריבית לחוב הקיים, גובה החוב המעודכן הוא

$$M + rM = (1 + r)M = qM$$

בתחילת החודש הראשון, החוב הוא a (גובה המשכנתה כולה). לכן: $a_1 = a$. לאחר מכן נגבית ריבית על בחודש הראשון, הזוג משלם b שקלים, ויתרת החוב היא $a - b$. לאחר מכן נגבית ריבית על החוב, וכאמור לעיל, החוב המעודכן הוא $q(a - b)$. זה סכום החוב בתחילת החודש השני,

$$a_2 = q(a - b) \quad \text{ולכן}$$

בחודש השני, משולמים b שקלים ויתרת החוב היא

$$q(a - b) - b = aq - bq - b$$

לאחר מכן, נגבית ריבית על החוב, ויתרת החוב בתחילת החודש השלישי היא

$$a_3 = q(aq - bq - b) = aq^2 - bq^2 - bq$$

וכך ממשיכים: בכל חודש, מפחיתים מהיתרה הקיימת b ומכפילים את התוצאה ב- q .

$$a_4 = q(aq^2 - bq^2 - bq - b) = aq^3 - bq^3 - bq^2 - bq \quad \text{לכן:}$$

באופן כללי, יתרת החוב בחודש ה- n היא

$$a_n = aq^{n-1} - bq^{n-1} - bq^{n-2} - \dots - bq = aq^{n-1} - b(q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

לפי נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

$$a_n = aq^{n-1} - bq \frac{q^{n-1} - 1}{q - 1} = aq^{n-1} - \frac{bq}{r} (q^{n-1} - 1) = \frac{bq}{r} + q^{n-1} \left(a - \frac{bq}{r}\right)$$

השאלה בעמוד 25

תשובה 14

עשרת האיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י הם:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55

השאלה בעמוד 25

תשובה 15

א. נתונה הסדרה:

$$a_1 = 10$$

$$a_{n+1} = a_n + 3 \quad n \geq 1$$

לכן:

$$a_2 = a_1 + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$a_3 = a_2 + 3 = 13 + 3 = 16$$

$$a_4 = a_3 + 3 = 16 + 3 = 19$$

$$a_5 = a_4 + 3 = 19 + 3 = 22$$

חמשת האיברים הראשונים בסדרה הם 10, 13, 16, 19, 22. הסדרה היא סדרה חשבונית.

ב. נתונה הסדרה:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 4$$

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 1 \quad n \geq 1$$

לכן:

$$a_3 = a_2 - a_1 + 1 = 4 - 3 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 + 1 = (-1) - 2 + 1 = -2$$

חמשת האיברים הראשונים בסדרה הם 3, 4, 2, -1, -2.

ג. נתונה הסדרה:

$$a_1 = 2$$

$$a_{n+1} = a_n + n + 1 \quad n \geq 1$$

לכן:

$$a_2 = a_1 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 = 4$$

$$a_3 = a_2 + 2 + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$$

$$a_4 = a_3 + 3 + 1 = 7 + 3 + 1 = 11$$

$$a_5 = a_4 + 4 + 1 = 11 + 4 + 1 = 16$$

חמשת האיברים הראשונים בסדרה הם 2, 4, 7, 11, 16.

ד. נתונה הסדרה:

$$a_1 = 1$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_n) \quad n \geq 1$$

לכן:

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$$

$$a_4 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

$$a_5 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{9}{8}\right) = \frac{27}{16}$$

חמשת האיברים הראשונים בסדרה הם 1, 1/2, 3/4, 9/8, 27/16.

הערה: ניתן להבחין שסדרה זו היא סדרה הנדסית, ומנתה היא $3/2$. דבר זה נובע מהשוויונות הבאים:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_{n-1}) \\ \Rightarrow a_1 + \dots + a_{n-1} &= 2a_n \\ \Rightarrow a_{n+1} &= \frac{1}{2}(a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n) = \frac{1}{2}(2a_n + a_n) = \frac{3}{2}a_n \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 26

תשובה 16

א. הסדרה $a_n = 5n + 3$ היא סדרה חשבונית עם $a_1 = 8, d = 5$ (ניתן לוודא זאת לפי נוסחת האיבר הכללי בסדרה חשבונית). הסדרה ניתנת להגדרה באופן רקורסיבי כך:

$$\begin{aligned} a_1 &= 8 \\ a_{n+1} &= a_n + 5 \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

ב. הסדרה $a_n = 3 \cdot 2^n$ היא סדרה הנדסית עם $a_1 = 6, q = 2$ (ניתן לוודא זאת לפי נוסחת האיבר הכללי בסדרה הנדסית). הסדרה ניתנת להגדרה באופן רקורסיבי כך:

$$\begin{aligned} a_1 &= 6 \\ a_{n+1} &= 2a_n \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 28

תשובה 17

עלינו להוכיח שלכל n טבעי מתקיים:

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

נוכיח טענה זו באינדוקציה.

עבור $n = 1$, מתקיים:

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$$

ואכן מתקיים שוויון.

כעת, נניח שהטענה נכונה עבור n טבעי מסוים, כלומר שמתקיים השוויון (1).

נוכיח שהטענה נכונה גם עבור $n+1$, כלומר שמתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \left(\sum_{i=1}^n i^2 \right) + (n+1)^2$$

נפשט את האגף השמאלי:

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

לפי הנחת האינדוקציה:

לכן די אם נוכיח שמתקיים

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

נפשט את האגף השמאלי:

$$\begin{aligned}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 &= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + n+1 \right) \\ &= (n+1) \left(\frac{n(2n+1) + 6(n+1)}{6} \right) \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\end{aligned}$$

נפשט את האגף הימני:

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} &= (n+1) \frac{(n+2)(2n+3)}{6} \\ &= (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}\end{aligned}$$

הוכחנו את השוויון המבוקש, ובכך סיימנו את צעד האינדוקציה. $\square$

השאלה בעמוד 28

תשובה 18

א. נסתמך על התכונה שהוכחה בשיעור 4, $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$,
לתכונה זו קראנו 'כפליות הערך המוחלט'. התכונה שנוכיח בשאלה זו היא הכללה שלה.

יהיו אפוא $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים ממשיים, ונוכיח שמתקיים:

$$(1) \quad |a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$$

עבור $n = 1$ השוויון אכן מתקיים: שני האגפים שווים ל- $|a_1|$.

כעת נניח שהשוויון (1) מתקיים לכל בחירה של $a_1, a_2, \dots, a_n$.

נוכיח את הטענה עבור $n + 1$, כלומר נוכיח שמתקיים

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n| \cdot |a_{n+1}|$$

לכל בחירה של $n + 1$ מספרים ממשיים, $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$.

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n \cdot a_{n+1}| = |(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n) \cdot a_{n+1}|$$

ואכן:

$$= |a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| \cdot |a_{n+1}|$$

לפי כפליות הערך המוחלט:

$$= |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n| \cdot |a_{n+1}|$$

לפי הנחת האינדוקציה:

כפי שרצינו להוכיח. $\square$

ב. יהי a מספר ממשי כלשהו, ויהי n מספר טבעי.

נסתמך על הטענה שבסעיף א, ונציב $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$. נקבל:

$$|a \cdot a \cdot \dots \cdot a| = |a| \cdot |a| \cdot \dots \cdot |a|$$

n פעמים n פעמים

$$|a^n| = |a|^n$$

כלומר,

השאלה בעמוד 28

תשובה 19

נוכיח באינדוקציה את נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

$$(1) \quad a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$a_1 \frac{q - 1}{q - 1} = a_1 \quad \text{עבור } n = 1, \text{ האגף הימני הוא}$$

ואכן מתקיים שוויון.

כעת נניח שהשוויון (1) מתקיים עבור n מסוים, ונוכיח את הטענה ל- $n + 1$:

$$\begin{aligned} & a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \\ &= (a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1}) + a_1q^n \\ &= a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} + a_1q^n \quad \text{לפי הנחת האינדוקציה:} \\ &= a_1 \frac{q^n - 1 + q^n(q - 1)}{q - 1} = a_1 \frac{q^n - 1 + q^{n+1} - q^n}{q - 1} = a_1 \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

בכך סיימנו את צעד האינדוקציה. $\square$

השאלה בעמוד 28

תשובה 20

טענה (אי־שוויון ברנולי): לכל $x \geq -1$, ולכל n טבעי מתקיים

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

הוכחה:

נקבע את x ונוכיח באינדוקציה על n . כאשר $n = 1$ מתקיים שוויון בין שני האגפים.

נניח כי האי־שוויון מתקיים עבור n . מכיוון ש- $x \geq -1$, מתקיים $1 + x \geq 0$.

לכן ניתן להכפיל את שני אגפי האי־שוויון ב- $1 + x$. מתקבל:

$$(1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx)$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + x)(1 + nx) = 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n + 1)x + nx^2$$

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x \quad \text{מכיוון ש- } nx^2 \geq 0, \text{ מתקבל:}$$

לכן האי־שוויון מתקיים עבור $n + 1$, וצעד האינדוקציה הושלם. $\square$

השאלה בעמוד 30

תשובה 21

א. המספר $5/2 = 2\frac{1}{2}$ אינו שלם. לכן $2 \nmid 5$. במילים אחרות: לא מתקיים $2 \mid 5$.

ב. המספר $10/7 = 1\frac{3}{7}$ אינו שלם. לכן $7 \nmid 10$.

ג. המספר 24 הוא כפולה שלמה של 8, כי $24 = 3 \cdot 8$. לכן $8 \mid 24$.

ד. המספר -6 הוא כפולה שלמה של 2, כי $-6 = (-3) \cdot 2$. לכן $2 \mid -6$.

ה. המספר $5/10 = 1/2$ אינו שלם. לכן $5 \nmid 10$.

ו. המספר 8 הוא כפולה שלמה של -1, כי $8 = (-8) \cdot (-1)$. לכן $-1 \mid 8$.

הערה: כל מספר שלם מתחלק ב-1, לפי הזהות $a = (-a) \cdot (-1)$.

השאלה בעמוד 30

תשובה 22

א. נניח ש- a, b ו- d הם מספרים שלמים המקיימים: $d \mid a$ וגם $d \mid b$.
 אז ניתן להציג $a = a'd$, $b = b'd$
 כשהמספרים a', b' הם מספרים שלמים.
 לכן, $a - b = a'd - b'd = (a' - b')d$
 המספר $a' - b'$ הוא שלם. לכן, לפי הגדרת ההתחלקות, $d \mid a - b$.
 ב. נניח ש- a ו- d הם מספרים שלמים המקיימים $d \mid a$ וש- c מספר שלם כלשהו.
 מהנתון נובע שקיים מספר שלם q המקיים $a = dq$.
 נכפיל את השוויון ב- c ונקבל $ac = dcq$. לכן $dc \mid ac$.
 ג. נניח ש- a, b ו- c הם מספרים שלמים המקיימים: $c \mid a$ ו- $b \mid c$.
 אז ניתן להציג: $a = qb$, $b = rc$
 כש- q, r מספרים שלמים. נציב $b = rc$ בשוויון $a = qb$:
 $a = qrc$ לכן, $c \mid a$.

השאלה בעמוד 31

תשובה 23

א. טענה: לכל n טבעי, $6 \mid n^3 - n$.
 הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n .
 עבור $n = 1$, מתקיים $n^3 - n = 0$ ולכן $6 \mid n^3 - n$.
 כעת נניח שמתקיים $6 \mid n^3 - n$, ונוכיח שמתקיים $6 \mid (n+1)^3 - (n+1)$:
 לפי נוסחאות הכפל המקוצר,

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 \cdot 1 + 3n \cdot 1^2 + 1^3 - (n+1) \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - (n+1) \\ &= (n^3 - n) + (3n^2 + 3n) \\ &= (n^3 - n) + 3(n^2 + n) \end{aligned}$$
 כפי שהוכחנו בדוגמה שבטקסט, $2 \mid n^2 + n$. לכן (לפי סעיף ב בשאלה הקודמת),
 $6 \mid 3(n^2 + n)$.
 לפי הנחת האינדוקציה, $6 \mid n^3 - n$. מתכונות ההתחלקות נקבל שגם הסכום מתחלק ב-6:
 $6 \mid (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$
 ולכן $6 \mid (n+1)^3 - (n+1)$, כפי שרצינו להוכיח.
 בכך סיימנו את צעד האינדוקציה. $\square$
 ב. טענה: לכל n טבעי, $3 \mid 4^n - 1$.
 הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n .
 עבור $n = 1$, מתקיים $4^n - 1 = 4 - 1 = 3$ ולכן $3 \mid 4^n - 1$.
 כעת נניח שמתקיים $3 \mid 4^n - 1$, ונוכיח שמתקיים $3 \mid 4^{n+1} - 1$:

לפי חוקי החזקות,

$$\begin{aligned} 4^{n+1} - 1 &= 4^n \cdot 4^1 - 1 = 4 \cdot 4^n - 1 \\ &= (3 + 1) \cdot 4^n - 1 = 3 \cdot 4^n + 4^n - 1 \end{aligned}$$

המספר $3 \cdot 4^n$ מתחלק ב-3, לפי הגדרת ההתחלקות.

המספר $4^n - 1$ מתחלק ב-3, לפי הנחת האינדוקציה.

לכן הסכום $3 \cdot 4^n + 4^n - 1$ מתחלק ב-3, כלומר $3 \mid 4^{n+1} - 1$, כנדרש. $\square$

ג. טענה: לכל n טבעי, $30 \mid 3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n .

עבור $n = 1$, מתקיים $3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n = 3 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 30$ ולכן $30 \mid 3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n$.

כעת נניח שמתקיים $30 \mid 3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n$, ונוכיח שמתקיים $30 \mid 3 \cdot 5^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+1}$:

$$5 \cdot (3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n) = 3 \cdot 5^{n+1} + 25 \cdot 3^n$$

לפי חוקי החזקות,

$$3 \cdot 5^{n+1} = 5 \cdot (3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n) - 25 \cdot 3^n$$

לכן

$$3 \cdot 5^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+1} = 5(3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n) - 25 \cdot 3^n + 5 \cdot 3^{n+1}$$

מכאן נקבל

$$= 5(3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n) - 25 \cdot 3^n + 5 \cdot 3 \cdot 3^n$$

$$= 5(3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n) - 25 \cdot 3^n + 15 \cdot 3^n$$

$$= 5(3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n) - 10 \cdot 3^n$$

מהשוויון $3^n = 3 \cdot 3^{n-1}$ נקבל $3 \mid 3^n$, ולכן (לפי שאלה 222) $30 \mid 10 \cdot 3^n$.

לפי הנחת האינדוקציה, $30 \mid 3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n$, ולכן (מתכונות ההתחלקות),

$$30 \mid 5 \cdot (3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n)$$

לפי שאלה 222, גם ההפרש $5(3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n) - 10 \cdot 3^n$ מתחלק ב-30, ולכן

$30 \mid 3 \cdot 5^{n+1} + 5 \cdot 3^{n+1}$ כפי שרצינו להוכיח. $\square$

ד. טענה: לכל n טבעי, $30 \mid 8^n - 5^n - 3^n$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על n .

עבור $n = 1$, מתקיים $8^n - 5^n - 3^n = 8 - 5 - 3 = 0$ ולכן $30 \mid 8^n - 5^n - 3^n$.

כעת נניח שמתקיים $30 \mid 8^n - 5^n - 3^n$, ונוכיח שמתקיים $30 \mid 8^{n+1} - 5^{n+1} - 3^{n+1}$:

$$8^{n+1} - 5^{n+1} - 3^{n+1} = 8(8^n - 5^n - 3^n) + 8(5^n + 3^n) - 5^{n+1} - 3^{n+1}$$

$$= 8(8^n - 5^n - 3^n) + 8 \cdot 5^n + 8 \cdot 3^n - 5 \cdot 5^n - 3 \cdot 3^n$$

$$= 8(8^n - 5^n - 3^n) + 3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n$$

לפי הנחת האינדוקציה, $30 \mid 8^n - 5^n - 3^n$ ולכן $30 \mid 8(8^n - 5^n - 3^n)$.

כפי שהוכחנו בסעיף ג, $30 \mid 3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n$.

לכן, $30 \mid 8(8^n - 5^n - 3^n) + 3 \cdot 5^n + 5 \cdot 3^n$, ומכאן $30 \mid 8^{n+1} - 5^{n+1} - 3^{n+1}$, כפי

שרצינו להוכיח. $\square$

תשובה 24

השורה החמישית במשולש פסקל היא: $1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1$
 בהתאם לכך, $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

תשובה 25

א. לפי נוסחת הבינום, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

נציב בנוסחה זו $a = x, b = 2y$:

$$\begin{aligned}(x+2y)^3 &= x^3 + 3x^2 \cdot 2y + 3x \cdot (2y)^2 + (2y)^3 \\ &= x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3\end{aligned}$$

ב. לפי נוסחת הבינום, $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

נציב בנוסחה זו $a = x, b = -y$

$$\begin{aligned}(x-y)^4 &= (x+(-y))^4 \\&= x^4 + 4x^3(-y) + 6x^2(-y)^2 + 4x(-y)^3 + (-y)^4 \\&= x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4\end{aligned}$$

ג. כפי שראינו בשאלה 24:

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

נציב בנוסחה זו $b \rightarrow -b$

$$(a + (-b))^5 = a^5 + 5a^4(-b) + 10a^3(-b)^2 + 10a^2(-b)^3 + 5a(-b)^4 + (-b)^5$$

$$(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5 \quad , \text{כלומר,}$$

נחבר את שתי הזהויות שקיבלנו:

$$(a+b)^5 + (a-b)^5 = 2a^5 + 20a^3b^2 + 10ab^4$$

תשובה 26

א. נמשיך את משולש פסקל עד לשורה השביעית:

$\begin{array}{ccccccccc} & & & & & 1 \\ & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 2 & & 1 \\ & & 1 & 3 & 3 & & 1 \\ & 1 & 6 & 10 & 10 & & 1 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \end{array}$

ב. לפי נוסחת המקדמים הבינומיים:

$$\binom{6}{0} = \frac{6!}{0!6!} = \frac{6!}{1 \cdot 6!} = 1$$

$$\binom{6}{1} = \frac{6!}{1!5!} = \frac{6!}{5!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 = 20$$

קיבלנו את המספרים הרשומים בשורה השישית במשולש פסקל.

השאלה בעמוד 33

תשובה 27

א. נציב בנוסחה $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1 \quad \text{ובאופן דומה,}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} = n \quad \text{ב. על פי ההגדרה,}$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2)} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{ג.}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n!}{(n-i)!i!} = \binom{n}{n-i} \quad \text{ד.}$$

הערה: משמעות הזהות שבסעיף ד היא שכל שורה במשולש פסקל היא סימטרית: אם נקרא אותה מהסוף להתחלה, נקבל שוב את אותה השורה. לכן משולש פסקל כולו סימטרי ביחס לציר המרכזי האנכי. ניתן להיווכח בכך גם בהתבוננות בדיאגרמה שבתשובה 26א.

השאלה בעמוד 33

תשובה 28

א. נציב בנוסחת הבינום $a = b = 1$:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}$$

ב. נציב בנוסחת הבינום $a = 1, b = -1$:

$$0 = 0^n = ((-1) + 1)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \cdot 1^{n-i} \cdot \binom{n}{i} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i}$$

משמעות סעיף א היא שסכום האיברים בשורה ה- n במשולש פסקל שווה ל- 2^n . לדוגמה, סכום האיברים בשורה הרביעית הוא

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16 = 2^4$$

משמעות סעיף ב היא שסכום האיברים בכל שורה, בסימנים מתחלפים הוא 0.

לדוגמה, סכום האיברים בסימנים מתחלפים בשורה הרביעית הוא

$$1 - 4 + 6 - 4 + 1 = 0$$

נוכל להסיק מכך שבכל שורה, סכום האיברים במקומות הזוגיים שווה לסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. לדוגמה, בשורה הרביעית $1 + 6 + 1 = 4 + 4$.

השאלה בעמוד 34

תשובה 29

א. לכל $1 \leq i \leq n$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} &= \frac{n!}{(i-1)!(n-(i-1))!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} = \\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n+1-i)!} + \frac{n!}{i!(n-i)!} = \\ &= \frac{in!}{i!(n+1-i)!} + \frac{(n+1-i)n!}{i!(n+1-i)!} = \\ &= \frac{n!}{i!(n+1-i)!} (i + (n+1-i)) = \\ &= \frac{n!(n+1)}{i!(n+1-i)!} = \frac{(n+1)!}{i!(n+1-i)!} = \binom{n+1}{i} \end{aligned}$$

ב. כזכור, הגדרנו: $P_{n,i}$ = האיבר ה- i בשורה ה- n במשולש פסקל.

נוכיח באינדוקציה על n שלכל n טבעי ולכל $0 \leq i \leq n$ מתקיים $P_{n,i} = \binom{n}{i}$.

עבור $n = 1$, $P_{n,0} = P_{n,1} = 1$ (לפי הגדרת משולש פסקל), וכן $\binom{n}{0} = \binom{n}{1} = 1$. לכן הטענה

המבוקשת מתקיימת.

כעת נניח שהטענה נכונה עבור n טבעי מסוים, ונוכיח שהיא נכונה עבור $n+1$.

יהי $0 \leq i \leq n+1$. נוכיח ש- $P_{n+1,i} = \binom{n+1}{i}$.

אם $i = 0$ או $i = n+1$ אז לפי הגדרת משולש פסקל, $P_{n+1,i} = 1$, ולפי שאלה 27א,

$$\binom{n+1}{i} = 1$$

אם $1 \leq i \leq n$ אז

לפי הגדרת משולש פסקל

$$P_{n+1,i} = P_{n,i} + P_{n,i-1}$$

לפי הנחת האינדוקציה

$$= \binom{n}{i} + \binom{n}{i-1}$$

לפי סעיף א

$$= \binom{n+1}{i}$$

כפי שרצינו להוכיח.

□

ג. הוכחת נוסחת הבינום.

נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי,

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$\triangleleft \text{מהנחת האינדוקציה נובע ש-} P_{n,i-1} = \binom{n}{i-1} \text{ ו- } P_{n,i} = \binom{n}{i}$$

כאשר $n = 1$, מתקיים

$$(a+b)^n = a+b = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}b^1a^0 = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

נניח כעת שמתקיים $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}a^{n-i}b^i$, ונחשב

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\&= (a+b)\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n\right) \\&= a\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n\right) + \\&\quad + b\left(\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n}b^n\right) \\&= \left(\binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n}{1}a^nb + \binom{n}{2}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{n}ab^n\right) + \\&\quad + \left(\binom{n}{0}a^nb + \binom{n}{1}a^{n-1}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}\right) \\&= a^{n+1} + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right)a^nb + \left(\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\right)a^{n-1}b^2 + \dots \\&\quad \dots + \left(\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right)ab^n + b^{n+1}\end{aligned}$$

שימוש בזהות $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ נותן

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i}a^{n+1-i}b^i$$

□

ובזאת הושלמה האינדוקציה.

השאלה בעמוד 36

תשובה 30

נחשב את ערכי הביטויים 2^n , עבור ערכים קטנים של n :

n	$n!$	2^n
1	1	2
2	2	4
3	6	8
4	24	16
5	120	32

מהטבלה נראה ש- $n! > 2^n$ לכל $n \geq 4$. נוכיח זאת באינדוקציה:

עבור $n = 4$ מתקיים, כפי שראינו, $2^4 = 16$, $n! = 24$ ולכן $n! > 2^n$.

נניח ש- $n \geq 4$ ו- $n! > 2^n$, ונוכיח שמתקיים $(n+1)! > 2^{n+1}$:
 מכך ש- $n \geq 4$ נובע $n+1 > 4$ ובוודאי $n+1 > 2$. לכן:

$$(n+1)! \stackrel{(1)}{=} (n+1)n! \stackrel{(2)}{>} 2n! > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$$

(1) לפי שאלה 5; (2) לפי הנחת האינדוקציה. בכך השלמנו את צעד האינדוקציה. $\square$

השאלה בעמוד 42

תשובה 31

נוכיח באינדוקציה שלמה שלכל $n \geq 8$ ניתן לספק n קופסאות תה על ידי צירוף מארזים של 3 ו-5 קופסאות תה.
 עבור $n = 8$, ניתן לספק מארז אחד של 3 קופסאות ומארז אחד של 5 קופסאות.
 נניח כעת כי עבור $n > 8$ מסוים ניתן לספק כל מספר של קופסאות בין 8 ל- $n-1$, ונוכיח שניתן לספק n קופסאות:
 אם $n = 9$ אז ניתן לספק 3 מארזים של 3 קופסאות.
 אם $n = 10$ אז ניתן לספק 2 מארזים של 5 קופסאות.
 אם $n \geq 11$ אז $n-3 \geq 8$ ו- $n-3 < n-1$, לכן לפי הנחת האינדוקציה ניתן לספק $n-3$ קופסאות תוך שימוש במארזים הנ"ל. נוסיף מארז אחד של 3 קופסאות, ונקבל בדיוק n קופסאות. $\square$

השאלה בעמוד 42

תשובה 32

טענה: לכל n , F_n (מספר פיבונאצ'י ה- n) הוא מספר טבעי.
 הוכחה: נוכיח באינדוקציה שלמה על n .
 עבור $n = 1$ מתקיים $F_n = 1$, ולכן F_n הוא מספר טבעי.
 יהי $n > 1$ טבעי, ונניח שכל המספרים $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ הם טבעיים. נוכיח ש- F_n טבעי:
 אם $n = 2$ אז $F_n = 1$ והוא מספר טבעי.
 אם $n > 2$ אז לפי הנחת האינדוקציה, המספרים F_{n-1} ו- F_{n-2} הם טבעיים. לפי הגדרת הסדרה מתקיים $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, ולכן גם F_n הוא מספר טבעי. $\square$

השאלה בעמוד 42

תשובה 33

נחשב כמה איברים של הסדרה:

$$a_1 = 1 \quad \text{לפי ההגדרה,}$$

$$a_2 = \sum_{i=1}^1 a_i = a_1 = 1 \quad \text{לפי נוסחת הרקורסיה } a_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i$$

$$a_3 = \sum_{i=1}^2 a_i = a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = \sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + 2 = 4$$

נוכיח שלכל $n \geq 2$ מתקיים $a_n = 2^{n-2}$. ההוכחה היא באינדוקציה שלמה על n :
 עבור $n = 2$ אכן מתקיים $a_2 = 1 = 2^0 = 2^{2-2}$.
 נניח ש- $n > 2$ ושהשויון $a_k = 2^{k-2}$ מתקיים לכל $2 \leq k \leq n-1$.

$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_1 + \sum_{i=2}^{n-1} a_i$$

לפי נוסחת הרקורסיה:

$$a_n = 1 + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{i-2}$$

מהנחת האינדוקציה נקבל

$$a_n = 1 + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{i-2}$$

הסכום $a_n = \sum_{i=2}^{n-1} 2^{i-2}$ הוא סכום של סדרה הנדסית בת $n-2$ איברים, שמנתה היא 2

ואיברה הראשון הוא 1. לפי נוסחת הסכום:

$$a_n = 1 + 1 \cdot \frac{2^{n-2} - 1}{2 - 1} = 1 + (2^{n-2} - 1) = 2^{n-2}$$

□

בכך השלמנו את צעד האינדוקציה.

השאלה בעמוד 43

תשובה 34

נתונה הסדרה החשבונית: 1000, 985, 970, 955, ...

א. הפרש הסדרה הוא $985 - 1000 = -15$, והאיבר הראשון בסדרה הוא 1000.

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 1000 - 15(n-1)$$

לכן נוסחת האיבר הכללי היא:

$$a_n = 1015 - 15n$$

נפשט:

ב. כדי למצוא כמה איברים חיוביים יש בסדרה, נפתור את האי־שוויון: $a_n > 0$.

$$\Leftrightarrow 1015 - 15n > 0$$

$$\Leftrightarrow 15n < 1015$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{1015}{15} = 67\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq n \leq 67$$

מכיוון ש־ n מספר טבעי:

לכן יש 67 איברים חיוביים בסדרה.

$$a_{67} = 1015 - 67 \cdot 15 = 10$$

ג. האיבר ה־67 בסדרה הוא

לפי נוסחת הסכום, סכום 67 האיברים הראשונים בסדרה הוא

$$S = \frac{1}{2}(1000 + 10) \cdot 67 = 505 \cdot 67 = 33835$$

השאלה בעמוד 43

תשובה 35

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{5}{3^i} = \frac{5}{3} + \frac{5}{9} + \dots + \frac{5}{3^{10}}$$

א.

סכום זה הוא סכום של סדרה הנדסית שעבורה מתקיים: $a_1 = 5/3$, $q = 1/3$, $n = 10$.

$$\sum_{i=1}^{10} \frac{5}{3^i} = \frac{5}{3} \left(\frac{(1/3)^{10} - 1}{1/3 - 1} \right) = \frac{5}{3} \left(\frac{1 - (1/3)^{10}}{1 - 1/3} \right)$$

לפיכך:

$$= \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{10}} \right) = \frac{5}{2} - \frac{5}{2 \cdot 3^{10}} \approx 2.499$$

ב. הסכום $2^0 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \dots + 2^{10}$ הוא סכום של סדרה הנדסית בעלת המאפיינים $a_1 = 1, q = -2, n = 11$. לפי נוסחת הסכום:

$$2^0 - 2^1 + 2^2 - 2^3 + 2^4 - \dots + 2^{10} = 1 \cdot \frac{(-2)^{11} - 1}{-2 - 1} = \frac{2^{11} + 1}{3}$$

$$(-2)^{11} = ((-1) \cdot 2)^{11} < \\ = (-1)^{11} \cdot 2^{11} = -2^{11}$$

ג. נתונה סדרה הנדסית בת 5 איברים, שאיברה הראשון הוא 1 ואיברה האחרון הוא 2. נסמן את איבריה ב- $a_1, a_2, \dots, a_5$. לפי הנתונים, מתקיים $a_1 = 1, a_5 = 2$. לפי נוסחת האיבר הכללי,

$$a_5 = a_1 q^4 = 1 \cdot q^4 = q^4$$

מתקבלת אפוא המשוואה $q^4 = 2$. מכיוון שנתון שאיברי הסדרה חיוביים, q הוא

מספר חיובי ולכן $q = \sqrt[4]{2}$. סכום הסדרה הוא:

$$S = 1 \cdot \frac{(\sqrt[4]{2})^5 - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{(\sqrt[4]{2})^4 \cdot (\sqrt[4]{2})^1 - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{2\sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1} = \frac{\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2} - 1}{\sqrt[4]{2} - 1}$$

$$= \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2} - 1} + 1$$

$q^4 = 2 = (\sqrt[4]{2})^4$ ולכן
 $q = \sqrt[4]{2}$. להסבר נוסף ראו פתרון
 שאלה 43, בעמוד 229.

השאלה בעמוד 43

תשובה 36

א. נתונה הסדרה החשבונית עם: $d = 7, a_1 = 4$. $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$

לפי נוסחת האיבר הכללי:

$$a_n = 4 + 7(n - 1)$$

$$a_{100} = 4 + 7 \cdot 99 = 697$$

ולכן

$$4, 11, 18, 25, 32, \dots, 690, 697$$

איברי הסדרה הם:

$$S = 100 \cdot \frac{4 + 697}{2} = 50 \cdot 701 = 35050$$

סכום הסדרה הוא

$$\sum_{i=1}^{100} (-1)^i a_i = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots - a_{99} + a_{100}$$

$$= -4 + 11 - 18 + 25 - \dots - 690 + 697$$

$$= (11 - 4) + (25 - 18) + \dots + (697 - 690)$$

$$= 7 + 7 + \dots + 7 = 50 \times 7 = 350$$

ב.

דרך פתרון נוספת: בסכום המבוקש, האיברים במקומות הזוגיים ($a_2, a_4, \dots, a_{100}$)

מופיעים בסימן +, והאיברים במקומות האי-זוגיים ($a_1, a_3, \dots, a_{99}$) מופיעים בסימן -.

נסמן ב- S_{even} את סכום האיברים במקומות הזוגיים שבסדרה $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{100}$,

וב- S_{odd} את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים בה.

$$\sum_{i=1}^{100} (-1)^i a_i = S_{\text{even}} - S_{\text{odd}}$$

הסכום המבוקש הוא:

סדרת האיברים במקומות הזוגיים היא $a_2 = 11, a_4 = 25, a_6 = 39, \dots$ סדרה זו היא

סדרה חשבונית עם הפרש 14. בסדרה זו יש 50 איברים, והאחרון שבהם הוא

$$a_{100} = 697 \text{ סכומה הוא:}$$

$$S_{\text{even}} = 50 \cdot \frac{a_2 + a_{100}}{2} = 50 \cdot \frac{11 + 697}{2} = 25 \cdot 708 = 17700$$

$<$ באנגלית, even = זוגי, odd = אי-זוגי

סדרת האיברים במקומות האיזוגיים היא $a_1 = 4, a_3 = 18, a_5 = 32, \dots$ גם סדרה זו היא סדרה חשבונית עם הפרש 14. בסדרה זו יש 50 איברים, והאחרון שבהם הוא $a_{99} = 690$. סכומה הוא:

$$S_{\text{odd}} = 50 \cdot \frac{a_1 + a_{100}}{2} = 50 \cdot \frac{4 + 690}{2} = 25 \cdot 694 = 17350$$

$$\sum_{i=1}^{100} (-1)^i a_i = 17700 - 17350 = 350 \quad \text{מכאן מתקבל:}$$

השאלה בעמוד 43

תשובה 37

א. נוכיח באינדוקציה על n , שלכל n טבעי מתקיים $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$.

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 = 1; \quad \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \left(\frac{1 \cdot 2}{2} \right)^2 = 1 \quad \text{עבור } n = 1$$

ואכן מתקיים שוויון.

קעת נניח שעבור n מסוים מתקיים $\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$, ונוכיח:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2$$

מהנחת האינדוקציה נובע השוויון הבא:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^n i^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3$$

$$(1) \quad \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 \quad \text{לכן די אם נוכיח שמתקיים}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{(n+2)^2}{4} \quad \text{נחלק ב- } (n+1)^2 \text{ לקבלת שוויון שקול:}$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2 \quad \text{נכפיל ב-4 לקבלת שוויון שקול:}$$

שוויון זה נובע מנוסחאות הכפל המקוצר.

לכן השוויון (1) מתקיים, כפי שרצינו להוכיח.

□

ב. נוכיח באינדוקציה את השוויון: $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{עבור } n = 1$$

ואכן מתקיים שוויון.

קעת נניח שעבור n מסוים מתקיים $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$, ונוכיח:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{(n+1)+1}$$

מהנחת האינדוקציה נובע השוויון הבא:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ (1) \quad 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= 1 - \frac{1}{n+2} \quad \text{לכן די אם נוכיח שמתקיים} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{נעביר אגפים, לקבלת שוויון שקול:}\end{aligned}$$

שוויון זה נובע מכללי השברים:

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

□

לכן נכון השוויון (1), כפי שרצינו להוכיח.

הערה: ניתן להוכיח את הטענה ללא אינדוקציה, כך:

$$\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} = \frac{(i+1) - i}{i(i+1)} = \frac{1}{i(i+1)} \quad \text{לכל } i \text{ טבעי מתקיים}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \quad \text{כלומר}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{ולכן} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

לסכום כזה, שבו המחוברים הפנימיים מתבטלים, קוראים **סכום טלסקופי**.

ג. נתונים: a, b מספרים ממשיים שונים זה מזה, ו- n מספר טבעי. נוכיח את הנוסחה:

$$\prod_{i=0}^{n-1} (a^{2^i} + b^{2^i}) = \frac{a^{2^n} - b^{2^n}}{a - b}$$

$$\prod_{i=0}^{n-1} (a^{2^i} + b^{2^i}) = a^{2^0} + b^{2^0} = a^1 + b^1 = a + b \quad \text{עבור } n = 1 \text{ מתקיים:}$$

$$\frac{a^{2^n} - b^{2^n}}{a - b} = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b} = a + b$$

ואכן מתקיים שוויון.

$$\text{כעת נניח שעבור } n \text{ מסוים מתקיים } \prod_{i=0}^{n-1} (a^{2^i} + b^{2^i}) = \frac{a^{2^n} - b^{2^n}}{a - b}, \text{ ונוכיח:}$$

$$\prod_{i=0}^{(n+1)-1} (a^{2^i} + b^{2^i}) = \frac{a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}}}{a - b}$$

מהנחת האינדוקציה נובע:

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^n (a^{2^i} + b^{2^i}) &= \left(\prod_{i=0}^{n-1} (a^{2^i} + b^{2^i}) \right) (a^{2^n} + b^{2^n}) \\ &= \frac{a^{2^n} - b^{2^n}}{a - b} (a^{2^n} + b^{2^n})\end{aligned}$$

נפשט לפי נוסחאות הכפל המקוצר וחוקי החזקות:

$$\begin{aligned}&= \frac{(a^{2^n} - b^{2^n})(a^{2^n} + b^{2^n})}{a - b} = \frac{(a^{2^n})^2 - (b^{2^n})^2}{a - b} \\ &= \frac{a^{2 \cdot 2^n} - b^{2 \cdot 2^n}}{a - b} = \frac{a^{2^{n+1}} - b^{2^{n+1}}}{a - b}\end{aligned}$$

□ הוכחנו את השוויון המבוקש, ובכך סיימנו את צעד האינדוקציה.

ד. נתונים: a, b מספרים ממשיים שונים זה מזה, ו- n מספר טבעי. נוכיח את הנוסחה:

$$(a - b) \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i = a^{n+1} - b^{n+1}$$

עבור $n = 1$ מתקיים:

$$\sum_{i=0}^1 a^{n-i} b^i = a^{1-0} b^0 + a^{1-1} b^1 = a^1 + b^1 = a + b$$

$$(a - b) \sum_{i=0}^1 a^{n-i} b^i = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = a^{n+1} - b^{n+1} \quad \text{ולכן}$$

כלומר, מתקיים השוויון המבוקש.

כעת נניח שעבור n מסוים מתקיים $(a - b) \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i = a^{n+1} - b^{n+1}$, ונוכיח:

$$(a - b) \sum_{i=0}^{n+1} a^{n+1-i} b^i = a^{n+2} - b^{n+2}$$

נתחיל בחישוב הבא:

$$\sum_{i=0}^{n+1} a^{n+1-i} b^i = \left(\sum_{i=0}^n a^{n+1-i} b^i \right) + b^{n+1} = \left(a \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i \right) + b^{n+1}$$

$$(a - b) \sum_{i=0}^{n+1} a^{n+1-i} b^i = a \left((a - b) \sum_{i=0}^n a^{n-i} b^i \right) + (a - b) b^{n+1} \quad \text{מכאן נקבל}$$

לפי הנחת האינדוקציה:

$$\begin{aligned}&= a(a^{n+1} - b^{n+1}) + (a - b)b^{n+1} \\ &= a^{n+2} - ab^{n+1} + ab^{n+1} - b^{n+2} \\ &= a^{n+2} - b^{n+2}\end{aligned}$$

□ < ראו המשך בעמוד הבא.

כפי שרצינו להוכיח.

הערות:

א. נכתוב את הזהות שהוכחנו באופן מפורש:

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2, \quad n=1 \quad \text{עבור}$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3, \quad n=2 \quad \text{עבור}$$

$$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4 - b^4, \quad n=3 \quad \text{עבור}$$

ובאופן כללי,

$$(a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

ניתן לראות כי זהות זו היא הכללה של זהויות מוכרות.

ב. דרך נוספת להוכחת הזהות היא בעזרת הנוסחה לסכום סדרה גיאומטרית. אם נניח

ש- $a \neq 0, b \neq 0$ אז הסדרה $a^n, a^{n-1}b, a^{n-2}b^2, \dots, b^n$ היא סדרה גיאומטרית,

ומנתה היא b/a . במקרים ש- $a = 0$ או $b = 0$, קל לוודא את נכונות הזהות באופן

ישיר.

השאלה בעמוד 44

תשובה 38

א. נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים $3 \mid 2^{n+1} + (-1)^n$.

נבדוק עבור $n=1$: במקרה זה $2^{n+1} + (-1)^n = 2^2 + (-1)^1 = 3$ ומספר זה אכן מתחלק

ב-3. כעת נניח שעבור n טבעי כלשהו מתקיים $3 \mid 2^{n+1} + (-1)^n$, ונוכיח

ש- $3 \mid 2^{n+2} + (-1)^{n+1}$:

$$2^{n+2} + (-1)^{n+1} = 2(2^{n+1} + (-1)^n) - 2(-1)^n + (-1)^{n+1}$$

מהנחת האינדוקציה ומכללי ההתחלקות נובע ש- $3 \mid 2(2^{n+1} + (-1)^n)$. לכן, מספיק

להוכיח ש- $3 \mid -2(-1)^n + (-1)^{n+1}$. ואכן:

$$\begin{aligned} -2(-1)^n + (-1)^{n+1} &= -2(-1)^n + (-1) \cdot (-1)^n \\ &= (-2 + (-1)) \cdot (-1)^n = (-3) \cdot (-1)^n \\ &= 3 \cdot (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

המספר $-2(-1)^n + (-1)^{n+1}$ שווה למכפלה של 3 ומספר שלם, ולכן מתחלק ב-3. $\square$

ב. נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים $6 \mid 5^n - 2^n - 3^n$.

נבדוק עבור $n=1$: במקרה זה $5^n - 2^n - 3^n = 5 - 2 - 3 = 0$ ומספר זה אכן מתחלק

ב-6. כעת נניח שעבור n טבעי כלשהו מתקיים $6 \mid 5^n - 2^n - 3^n$, ונוכיח

ש- $6 \mid 5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$:

$$\begin{aligned} 5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1} &= 5(5^n - 2^n - 3^n) + 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n - 2^{n+1} - 3^{n+1} \\ &= 5(5^n - 2^n - 3^n) + 5 \cdot 2^n + 5 \cdot 3^n - 2 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n \\ &= 5(5^n - 2^n - 3^n) + 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n \end{aligned}$$

לפי הנחת האינדוקציה, $6 \mid 5^n - 2^n - 3^n$ ולכן $6 \mid 5(5^n - 2^n - 3^n)$.

כמו כן, היות ש- n מספר טבעי, $n-1 \geq 0$ ולכן נוכל להציג

$$3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n = 3 \cdot 2 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 3 \cdot 3^{n-1} = 6(2^{n-1} + 3^{n-1})$$

לכן $6 \mid 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$.

קיבלנו שכל המחזורים בסכום $5(5^n - 2^n - 3^n) + 3 \cdot 2^n + 2 \cdot 3^n$ מתחלקים ב-6, ולכן,

לפי כללי ההתחלקות, הסכום כולו מתחלק ב-6, כלומר $6 \mid 5^{n+1} - 2^{n+1} - 3^{n+1}$. $\square$

ג. נוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי מתקיים $5 \mid n^5 - n$.

נבדוק עבור $n = 1$: במקרה זה $n^5 - n = 1^5 - 1 = 0$ ומספר זה אכן מתחלק ב-5. כעת

נניח שעבור n טבעי כלשהו מתקיים $5 \mid n^5 - n$, ונוכיח ש- $5 \mid (n+1)^5 - (n+1)$.

$$(n+1)^5 = n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$

$$(n+1)^5 - (n+1) = n^5 - n + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n$$

לפי הנחת האינדוקציה, $5 \mid n^5 - n$. שאר המחזורים שבאגף הימני מתחלקים ב-5, ולכן

$5 \mid (n+1)^5 - (n+1)$, כפי שרצינו להוכיח. $\square$

הערה: ניתן להוכיח (ולא נעשה זאת במסגרת קורס זה), שלכל מספר ראשוני p , ולכל מספר טבעי n , מתקיים $p \mid n^p - n$. טענה זו נקראת 'המשפט הקטן של פרמה', על שם המתמטיקאי הצרפתי פייר דה פרמה (Pierre de Fermat, 1607-1665). שימו לב שטענה זו לא מתקיימת ללא ההנחה ש- p מספר ראשוני. לדוגמה, $3^4 - 3 = 78$ ומספר זה אינו מתחלק ב-4.

תשובה 39

נוכיח את הנוסחה:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

א. עבור $n = 1$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 1 = F_1 \end{aligned}$$

עבור $n = 2$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{4\sqrt{5}}{4} = 1 = F_2 \end{aligned}$$

וידאנו את נכונות הנוסחה עבור $n = 1$ ועבור $n = 2$.

ב. אם מספר ממשי α מקיים $\alpha^2 = \alpha + 1$, ו- $n \geq 3$, אז נכפיל את השוויון הנתון

ב- α^{n-2} , ונקבל: $\alpha^{n-2}\alpha^2 = \alpha^{n-2}\alpha + \alpha^{n-2}$, כלומר: $\alpha^n = \alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}$.

ראו פתרון שאלה 24, בעמוד 214

השאלה בעמוד 44

ג. המשוואה $x^2 = x + 1$ היא ריבועית. נציג אותה כך: $x^2 - x - 1 = 0$

נפתור לפי נוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

כלומר, הפתרונות הם $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

ד. נתונה הסדרה:

$$G_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right) = \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{5}}$$

מסעיף א נובע שמתקיים $G_1 = G_2 = 1$.

לכל $n \geq 3$ מתקיים, לפי סעיף ב: $x_1^n = x_1^{n-1} + x_1^{n-2}$ וגם $x_2^n = x_2^{n-1} + x_2^{n-2}$.

$$G_n = \frac{x_1^n - x_2^n}{\sqrt{5}} = \frac{x_1^{n-1} + x_1^{n-2} - (x_2^{n-1} + x_2^{n-2})}{\sqrt{5}} \quad \text{לכן}$$

$$= \frac{x_1^{n-1} - x_2^{n-1}}{\sqrt{5}} + \frac{x_1^{n-2} - x_2^{n-2}}{\sqrt{5}} = G_{n-1} + G_{n-2}$$

ה. ראינו שהסדרה $G_1, G_2, G_3, \dots$ מקיימת: $G_1 = G_2 = 1$, וגם $G_n = G_{n-1} + G_{n-2}$ לכל

$n \geq 3$. במילים אחרות, הסדרה מקיימת את התנאים המגדירים את סדרת פיבונאצ'י

$F_1, F_2, F_3, \dots$. לכן $F_n = G_n$ לכל n .

השאלה בעמוד 44

תשובה 40

נזכיר כי כל מספר טבעי זוגי הוא מהצורה $2n$, עבור n מספר שלם. ולהיפך: כל מספר מהצורה $2n$ הוא זוגי. כמו כן, כל מספר טבעי אי-זוגי הוא מהצורה $2n + 1$, עבור n מספר שלם. ולהיפך: כל מספר מהצורה $2n + 1$ הוא אי-זוגי.

כעת נוכיח את הכללים. בהוכחות שלהלן a ו- b מציינים מספרים טבעיים.

א. זוגי + זוגי = זוגי

כלומר, אם a ו- b זוגיים אז $a + b$ זוגי.

כלל זה נובע מתכונות ההתחלקות: סכום של שני מספרים המתחלקים ב-2 מתחלק אף הוא ב-2.

ב. זוגי + אי-זוגי = אי-זוגי

כלומר, אם a זוגי ו- b אי-זוגי אז $a + b$ אי-זוגי.

הוכחה: לפי האמור לעיל, ניתן לבטא $a = 2m$ ו- $b = 2n + 1$ (עבור m, n שלמים). לכן

$$a + b = 2m + 2n + 1 = 2(m + n) + 1$$

לכן $a + b$ הוא מהצורה $2k + 1$, ומכאן שהוא אי-זוגי.

ג. אי-זוגי + אי-זוגי = זוגי

כלומר: אם a ו- b אי-זוגיים אז $a + b$ זוגי.

הוכחה: נבטא $a = 2m + 1, b = 2n + 1$. נקבל

$$a + b = 2m + 1 + 2n + 1 = 2m + 2n + 2 = 2(m + n + 1)$$

ולכן $a + b$ זוגי.

ד. זוגי $\times$ מספר כלשהו = זוגי

תכונה זו נובעת מיידית מחוקי ההתחלקות: אם מספר מסוים מתחלק ב-2 אז כל כפולה שלמה שלו מתחלקת ב-2.

ה. אי-זוגי $\times$ אי-זוגי = אי-זוגי

כלומר: אם a ו- b אי-זוגיים אז ab אי-זוגי.

הוכחה: נבטא $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$. נקבל

$$ab = (2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1$$

לכן ab אי-זוגי.

השאלה בעמוד 44

תשובה 41

נתבונן בעשרת האיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$$

מהתבוננות זו נראה שכל מספר שלישי בסדרה הוא זוגי, כלומר שהמספרים הזוגיים בסדרה

הם $F_3 = 2, F_6 = 8, F_9 = 34, \dots$. נוכיח זאת:

טענה: לכל n טבעי, אם $3 \mid n$ אז F_n זוגי, ואם $3 \nmid n$ אז F_n אי-זוגי.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה שלמה על n .

עבור $n = 1$, $3 \nmid n$ ואכן $F_1 = 1$ הוא אי-זוגי.

נניח נניח ש- $n > 1$, והטענה נכונה עבור $1, 2, \dots, n$. נוכיח את הטענה עבור n .

אם $n = 2$ אז $3 \nmid n$ ואכן $F_2 = 1$ הוא אי-זוגי.

נניח מעתה ש- $n \geq 3$, ונציג את n לפי חילוק עם שארית ב-3: $n = 3k + r$, כאשר

$0 \leq r \leq 2$, k ו- r מספרים שלמים. נתבונן בנפרד במקרים הבאים:

- אם $r = 0$, אז $n = 3k$ ולכן n מתחלק ב-3. במקרה זה, המספרים $n - 1 = 3k - 1$ ו- $n - 2 = 3k - 2$ אינם מתחלקים ב-3, ולפי הנחת האינדוקציה, המספרים F_{n-1}, F_{n-2} הם אי-זוגיים. כפי שהוכחנו בשאלה הקודמת, מכאן נובע ש- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ הוא זוגי.

- אם $r = 1$, אז $n = 3k + 1$ ולכן n אינו מתחלק ב-3. במקרה זה, $n - 1 = 3k$ מתחלק ב-3 ו- $n - 2 = 3k - 1$ אינו מתחלק ב-3. לפי הנחת האינדוקציה, F_{n-1} זוגי ו- F_{n-2} אי-זוגי. כפי שהוכחנו בשאלה הקודמת, מכאן נובע ש- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ הוא אי-זוגי.

- אם $r = 2$, אז $n = 3k + 2$ ולכן n אינו מתחלק ב-3. במקרה זה, $n - 1 = 3k + 1$ אינו מתחלק ב-3 ו- $n - 2 = 3k$ מתחלק ב-3. לפי הנחת האינדוקציה, F_{n-1} אי-זוגי ו- F_{n-2} זוגי. לכן $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ הוא אי-זוגי.

וידאנו שבכל המקרים הטענה מתקיימת עבור n , ובכך השלמנו את צעד האינדוקציה. $\square$

א. נוכיח באינדוקציה את האי־שוויון $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$. במהלך ההוכחה נסתמך על

אי־שוויון המשולש (שהכרנו בשיעור 4): $|a + b| \leq |a| + |b|$.

עבור $n = 1$, מתקיים $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| = |a_1|$ וכן $\sum_{i=1}^n |a_i| = |a_1|$, לכן מתקיים שוויון בין שני

האגפים, ובפרט מתקיים האי־שוויון הנדרש.

כעת נניח שהטענה מתקיימת עבור n מסוים, ויהיו $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ מספרים ממשיים.

נוכיח שמתקיים $\left| \sum_{i=1}^{n+1} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|$:

לפי הנחת האינדוקציה, מתקיים $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$. לכן, ולפי אי־שוויון המשולש,

$$\square \quad \left| \sum_{i=1}^{n+1} a_i \right| = \left| \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1} \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| + |a_{n+1}| \leq \sum_{i=1}^n |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{i=1}^{n+1} |a_i|$$

ב. נוכיח באינדוקציה שלכל $a_1, \dots, a_n$ אי־שליליים מתקיים $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}$. במהלך

ההוכחה נסתמך על האי־שוויון הבא (שהוכח בשאלה 35 ביחידה 4): לכל $a \geq 0, b \geq 0$,

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

עבור $n = 1$, שני אגפי האי־שוויון שווים ל־ $\sqrt{a_1}$, לכן מתקיים שוויון, ובפרט מתקיים

האי־שוויון הנדרש.

כעת נניח שהטענה מתקיימת עבור n מסוים, ויהיו $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ מספרים ממשיים

אי־שליליים. נוכיח שמתקיים $\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} \leq \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{a_i}$: לפי הנחת האינדוקציה, מתקיים

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i}, \text{ לכן, ולפי האי־שוויון } \sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} a_i} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i} + \sqrt{a_{n+1}}$$

$$\square \quad \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} + \sqrt{a_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \sqrt{a_i}$$

תשובה 43

- א. נניח ש- $a > b \geq 0$, ונוכיח באינדוקציה על n ש- $a^n > b^n \geq 0$.
 עבור $n = 1$, האי-שוויון המבוקש הוא $a^1 > b^1 \geq 0$, וזהו הנתון $a > b \geq 0$.
 נניח שמתקיים עבור n טבעי מסוים $a^n > b^n \geq 0$. כפי שלמדנו בשיעור 4, ניתן להכפיל אי-שוויונות אי-שליליים זה בזה. נכפיל את שני האי-שוויונות האי-שליליים $a^n > b^n$ ו- $a \geq 0, b \geq 0$, ונקבל $a^{n+1} > b^{n+1}$. נכפיל את שני האי-שוויונות האי-שליליים $a^n > b^n$ ו- $b^n \geq 0, b \geq 0$, ונקבל $b^{n+1} \geq 0$. ביחד, נקבל: $a^{n+1} > b^{n+1} \geq 0$.
- ב. נניח ש- $a \geq 0, b \geq 0$ ו- $a^n = b^n$, ונוכיח ש- $a = b$.
 אם $a > b$ אז לפי סעיף א, $a^n > b^n$, ולפי הנתון זה לא ייתכן.
 אם $b > a$ אז לפי סעיף א, $b^n > a^n$, ולפי הנתון זה לא ייתכן.
 לכן תיתכן רק האפשרות ש- $a = b$, כפי שרצינו להוכיח.
- ג. נניח ש- $a > b \geq 0$, ונוכיח ש- $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.
 לפי הגדרת השורש ה- n , מתקיים $\sqrt[n]{a} \geq 0, \sqrt[n]{b} \geq 0$ וכן $(\sqrt[n]{a})^n = a, (\sqrt[n]{b})^n = b$.
 אם $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ אז $a = (\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{b})^n = b$, ולפי הנתון זה לא ייתכן.
 אם $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ אז לפי סעיף א, $a = (\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n = b$, ולפי הנתון זה לא ייתכן.
 לכן תיתכן רק האפשרות ש- $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$, כפי שרצינו להוכיח.

פתרונות לשאלות בשיעור 6

השאלה בעמוד 48

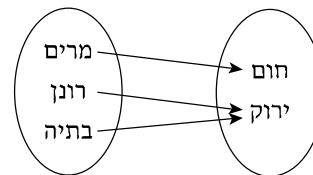
תשובה 1

נתונה רשימת התלמידים:

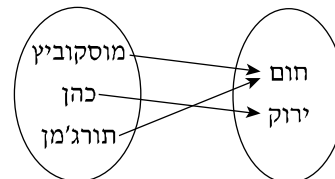
מס' סידורי	שם פרטי	שם משפחה	צבע עיניים
1	מרים	מוסקוביץ	חום
2	רונן	כהן	ירוק
3	מרים	תורג'מן	חום
4	בתיה	כהן	ירוק

א. שם המשפחה אינו פונקציה של השם הפרטי, כי יש שתי תלמידות בעלות השם הפרטי מרים ובעלות שמות משפחה שונים. לכן ידיעת השם הפרטי לא גוררת ידיעה של שם המשפחה.

ב. צבע העיניים הוא פונקציה של השם הפרטי: למי ששמה הפרטי הוא מרים יש עיניים חומות; למי ששמו הפרטי הוא רונן או בתיה יש עיניים ירוקות. נייצג קשר זה בדיאגרמה:

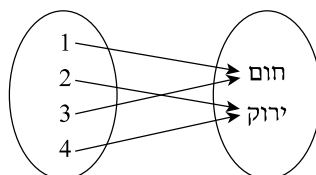


ג. צבע העיניים הוא פונקציה של שם המשפחה. הקשר מיוצג בדיאגרמה הבאה:



ד. המספר הסידורי אינו פונקציה של צבע העיניים. לדוגמה, לרונן ולבתיה יש צבע עיניים זהה אך מספר סידורי שונה.

ה. צבע העיניים הוא פונקציה של המספר הסידורי: ידיעת המספר הסידורי גוררת ידיעה של צבע העיניים. הדיאגרמה המתאימה היא:



השאלה בעמוד 50

תשובה 2

א. הגדרנו:

- $A =$ קבוצת הבניינים, $B =$ קבוצת הדירות, ו- $f: A \rightarrow B$ מוגדרת על ידי התכונה שלכל $a \in A$, $f(a)$ היא דירה בבניין a . הגדרה זו אינה תקינה, כי אינה חד-משמעית. אם a הוא בניין שיש בו יותר מדירה אחת, אז לא ניתן לקבוע בוודאות מהי $f(a)$.
- ב. הגדרנו $g: B \rightarrow A$ באופן הבא: לכל $b \in B$, $g(b)$ הוא הבניין שבו נמצאת הדירה b . הגדרה זו תקינה: כל דירה נמצאת בבניין אחד ויחיד, לכן ההגדרה היא חד-משמעית. כמו כן, לכל $b \in B$ מתקיים $g: B \rightarrow A$, כי A היא קבוצת הבניינים שברחוב.
- ג. הגדרנו $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ לפי הנוסחה $f(a) = 3 - a$. הגדרה זו תקינה, כי לכל מספר שלם a , ההפרש $3 - a$ הוא מספר שלם, ומוגדר באופן חד-משמעי.
- ד. הגדרנו $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ לפי הנוסחה $f(a) = a/2$. אך אם נציב $a = 1$ בהגדרה, נקבל $f(a) = 1/2$ ו- $1/2 \notin \mathbb{Z}$. לכן הגדרת f אינה תקינה.

השאלה בעמוד 50

תשובה 3

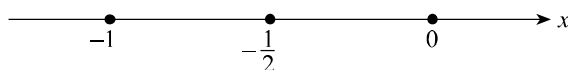
נתון: $f(x) = x^3 - 2x$. נציב בהגדרה זו:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \\ f(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2 = 8 - 4 = 4 \\ f(3) &= 3^3 - 2 \cdot 3 = 27 - 6 = 21 \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 52

תשובה 4

- א. הפונקציה $f(x) = x + 1$ מוגדרת עבור כל x ממשי, כי פעולת החיבור מוגדרת בין כל שני מספרים ממשיים. לכן תחום ההגדרה שלה הוא $\mathbb{R}$.
- ב. הפונקציה $f(x) = 1/(x(2x-1))$ מוגדרת עבור כל x שעבורו המכנה שבביטוי לא מתאפס. כלומר, f מוגדרת עבור כל x המקיים $x \neq 0$ ו- $x \neq 1/2$. תחום ההגדרה הוא $\mathbb{R} \setminus \{0, 1/2\}$.
- ג. הפונקציה $f(x) = \sqrt{|x| - |x+1|}$ מוגדרת לכל x שעבורו מתקיים $|x| - |x+1| \geq 0$.
- $$\begin{aligned} &\Leftrightarrow |x| \geq |x+1| \\ &\Leftrightarrow |x-0| \geq |x-(-1)| \end{aligned}$$
- משמעות אי-שוויון זה היא שהמרחק בין x ל- (-1) אינו עולה על המרחק בין x ל- 0 .



דבר זה שקול לכך ש- x נמצא על פני ציר המספרים הממשיים על הנקודה $-1/2$ או משמאל לה.

לכן:
$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}$$

תחום ההגדרה הוא $(-\infty, -1/2]$.

השאלה בעמוד 52

תשובה 5

א. נתונה ההגדרה: $f(x) = (x-6)/2$, $f: [6,8] \rightarrow [0,1]$.

לכל $x \in [6,8]$, $f(x)$ מוגדר (אין בעיה בביצוע הפעולות שבהגדרה).

כמו כן, מתקיים לפי ההנחה: $6 \leq x \leq 8$

נפחית 6 מכל האגפים: $\Rightarrow 0 \leq x-6 \leq 2$

נחלק ב-2: $\Rightarrow 0 \leq \frac{x-6}{2} \leq 1 \Rightarrow f(x) \in [0,1]$

לכל $x \in [6,8]$ מתקיים אפוא $f(x) \in [0,1]$, לכן f מוגדרת היטב.

ב. נתונה ההגדרה: $f(x) = 8x + 1$, $f: (0,1) \rightarrow (1,8)$.

נתבונן, למשל, במספר $x = 0.9$. לפי ההגדרה מתקיים:

$$f(x) = 8x + 1 = 8 \cdot 0.9 + 1 = 8.2$$

לכן $f(x) \notin [1,8]$, למרות ש- $x \in (0,1)$. לכן f לא מוגדרת היטב.

ג. נתונה ההגדרה: $f(x) = 1 - x^2$, $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 1]$.

$f(x)$ מוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$, וכמו כן מתקיים $x^2 \geq 0$ ולכן $1 - x^2 \leq 1$, כלומר

$$f(x) = 1 - x^2 \in (-\infty, 1]$$

לכן f מוגדרת היטב.

ד. נתונה ההגדרה: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$.

$f(x)$ מוגדר לכל $x \in \mathbb{R}$, וכן מתקיים לכל x :

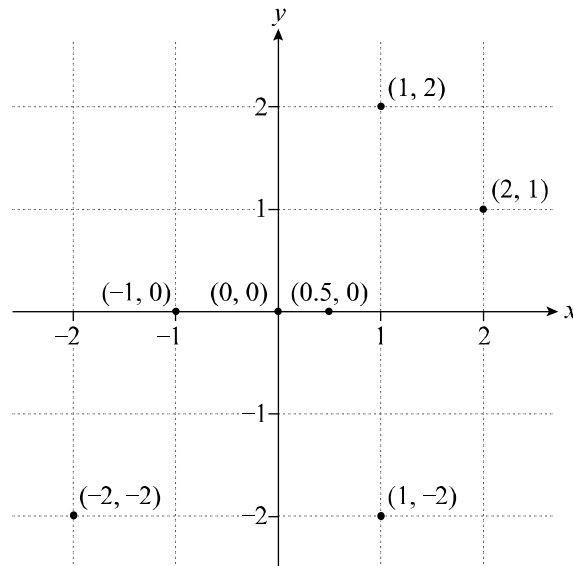
$$f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$$

לכן לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) \in [0, \infty)$ ומכאן ש- f מוגדרת היטב.

◁ לפי נוסחאות הכפל המקוצר

השאלה בעמוד 54

תשובה 6



השאלה בעמוד 57

תשובה 7

נתונה הפונקציה $f(x) = (x+1)/2$.

נחשב את ערכיה בנקודות המבוקשות:

$$f(0) = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}; \quad f(1) = \frac{1+1}{2} = 1$$

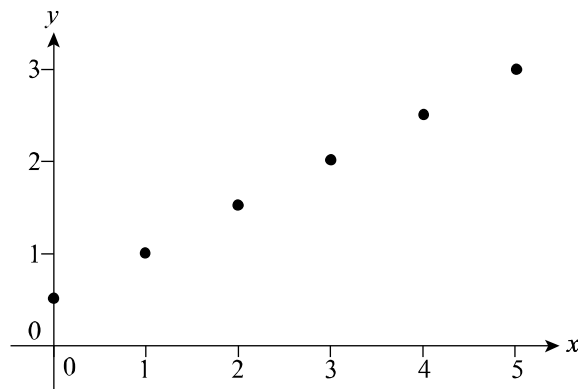
$$f(2) = \frac{2+1}{2} = 1\frac{1}{2}; \quad f(3) = \frac{3+1}{2} = 2$$

$$f(4) = \frac{4+1}{2} = 2\frac{1}{2}; \quad f(5) = \frac{5+1}{2} = 3$$

מכאן מתקבלות הנקודות על הגרף:

$$\left(0, \frac{1}{2}\right), (1, 1), \left(2, 1\frac{1}{2}\right), (3, 2), \left(4, 2\frac{1}{2}\right), (5, 3)$$

נתווה נקודות אלה במישור הקרטזי:

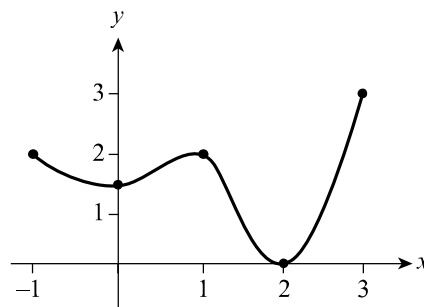


כל הנקודות נמצאות על ישר אחד, לכן ניתן לשער שגרף הפונקציה כולו הוא קו ישר.

השאלה בעמוד 57

תשובה 8

נתבונן באיור:



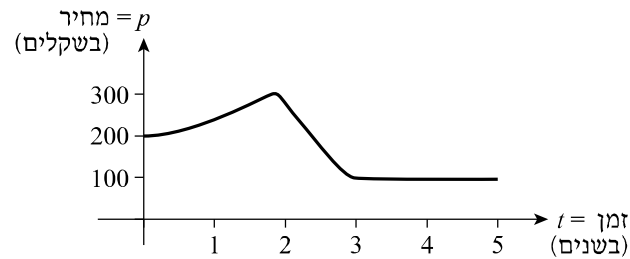
מאיור זה ניתן לראות כי:

$$f(-1) = 2, \quad f(0) = 1.5, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 0, \quad f(3) = 3$$

השאלה בעמוד 58

תשובה 9

נתבונן בגרף:



- א. מחירו ההתחלתי של המוצר היה 200 שקלים.
 ב. בשנתיים הראשונות מחיר המוצר עלה בהדרגה עד ל-300 שקלים.
 ג. במהלך השנה השלישית מחיר המוצר ירד בהדרגה (אך בקצב מהיר יותר) עד ל-100 שקלים.
 ד. בשנה הרביעית והחמישית מחיר המוצר היה יציב ולא חלו בו שינויים.
 ה. המחיר הגבוה ביותר היה בתום השנתיים הראשונות: 300 שקלים.

השאלה בעמוד 61

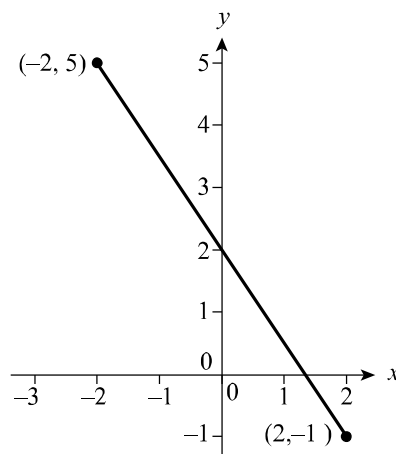
תשובה 10

נתונה הפונקציה $f(x) = 2 - 1.5x$, ונרצה לשרטט את הגרף שלה בקטע $[-2, 2]$. נחשב את ערכי הפונקציה בנקודות הקצה:

$$f(-2) = 2 - 1.5 \cdot (-2) = 2 + 3 = 5$$

$$f(2) = 2 - 1.5 \cdot 2 = 2 - 3 = -1$$

מכאן נקבל שהנקודות $(-2, 5)$ ו- $(2, -1)$ נמצאות על גרף הפונקציה. מאחר שהגרף הוא קטע מקו ישר, לא נותר אלא לחבר את שתי הנקודות בקו ישר:



השאלה בעמוד 62

תשובה 11

א. נחפש פונקציה לינארית $f(x) = ax + b$ עם $a = 3$, המקיימת $f(10) = 2$.

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) \quad \text{לפי הנוסחה}$$

נקבל (בהצבה $x_0 = 10$):

$$f(x) = f(10) + 3 \cdot (x - 10) = 2 + 3x - 30 = 3x - 28$$

ב. כעת נחפש פונקציה f כנ"ל עם $a = -2$, $f(-1) = 3$.

לפי אותה נוסחה נקבל (בהצבה $x_0 = -1$):

$$f(x) = f(-1) + (-2) \cdot (x - (-1)) = 3 - 2(x + 1) = 1 - 2x$$

השאלה בעמוד 62

תשובה 12

עלינו למצוא פונקציה לינארית $f(x) = ax + b$ המקיימת: $f(1) = 5$, $f(3) = 11$.

נציב בנוסחת השיפוע $x_1 = 1$, $x_2 = 3$:

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{11 - 5}{2} = 3$$

כעת ניעזר בנוסחה לפונקציה לינארית על פי ערך בנקודה מסוימת ושיפוע:

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0)$$

נציב בנוסחה $x_0 = 1$ (אפשר גם להציב $x_0 = 3$ ולקבל תוצאה סופית זהה):

$$f(x) = f(3) + a(x - 3) = 11 + 3(x - 3) = 3x + 2$$

השאלה בעמוד 64

תשובה 13

נתונה הפונקציה $f(x) = 2x + 3$.

נקודת המפגש של גרף הפונקציה עם ציר ה- y היא $(0, f(0))$, כלומר $(0, 3)$.

כדי למצוא את נקודת המפגש עם ציר ה- x , נפתור את המשוואה $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} = -1.5$$

נקודת המפגש עם ציר ה- x היא $(-1.5, 0)$.

השאלה בעמוד 69

תשובה 14

א. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 6x + 5$.

נקודת המפגש של גרף הפונקציה עם ציר ה- y היא $(0, f(0))$, כלומר $(0, 5)$.

כדי למצוא את נקודת המפגש עם ציר ה- x , נפתור את המשוואה $f(x) = 0$:

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2}$$

פתרונות המשוואה הם $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

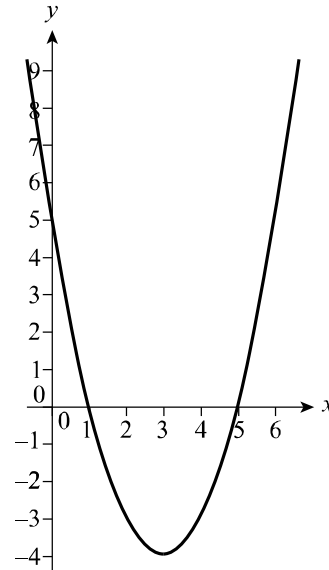
לכן נקודות המפגש של גרף הפונקציה עם ציר ה- x הן $(1, 0)$ ו- $(5, 0)$.

כפי שהוכחנו, שיעור־ x של קודקוד הפרבולה $y = ax^2 + bx + c$ הוא $-b/(2a)$.
 לכן עבור הפרבולה הנתונה הערך הזה הוא $6/2 = 3$.
 כדי למצוא את שיעור־ y של הקודקוד, נציב $x = 3$ בפונקציה:

$$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = -4$$

קודקוד הפרבולה הוא $(3, -4)$.

לפי הנקודות שמצאנו, נתווה את גרף הפונקציה:



ב. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 3x + 5$.
 נקודת המפגש עם ציר ה־ y היא $(0, f(0)) = (0, 5)$.
 נמצא את פתרונות המשוואה $f(x) = 0$:

$$D = 9 - 20 = -11 < 0$$

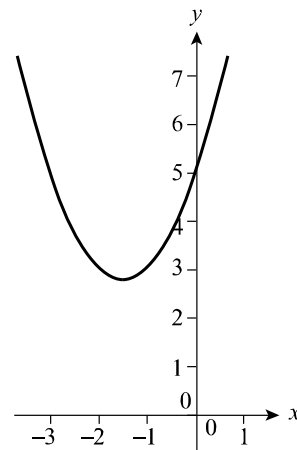
לכן למשוואה $f(x) = 0$ אין פתרונות, ומכאן שגרף הפונקציה $f(x)$ לא נפגש עם ציר ה־ x .

שיעור־ x של קודקוד הפרבולה הוא (לפי הנוסחה שצוינה לעיל) $-3/2$.
 נציב את הערך הזה בפונקציה:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 5 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 5 = \frac{9 - 18 + 20}{4} \\ &= \frac{11}{4} = 2\frac{3}{4} \end{aligned}$$

קודקוד הפרבולה הוא הנקודה $\left(-1\frac{1}{2}, 2\frac{3}{4}\right)$.

גרף הפונקציה נראה כך:



ג. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2 - 9$.

נציג אותה בצורה המקובלת של פונקציה ריבועית:

$$f(x) = (-1) \cdot x^2 + 6 \cdot x + (-9) \quad (a = -1, b = 6, c = -9)$$

$$(0, f(0)) = (0, -9) \quad \text{נקודת המפגש עם ציר ה-} y \text{ היא}$$

$$-x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \text{נפתור את המשוואה } f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2}$$

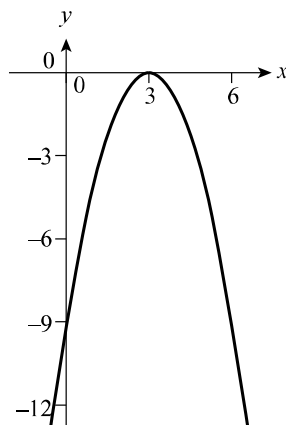
למשוואה $f(x) = 0$ יש פתרון יחיד והוא $x = 3$.

לכן לגרף הפונקציה יש נקודת מפגש אחת ויחידה עם ציר ה- x : $(3, 0)$. נקודה זו היא גם

קודקוד הפרבולה, שכן שיעור- x של הקודקוד הוא $6/2 = 3$.

נשים לב שהפרבולה היא שלילית, כי המקדם של x^2 הוא -1 .

גרף הפונקציה נראה כך:



הערה: ניתן להציג את הפונקציה גם כך:

$$f(x) = -(x^2 - 6x + 9) = -(x - 3)^2$$

השאלה בעמוד 70

תשובה 15

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

נתונה הפונקציה

א. תחום ההגדרה הוא $[0, 2] \cup (2, 4] = [0, 4]$.

$$f(1) = 1^2 - 1 = 0 \quad \text{ב.}$$

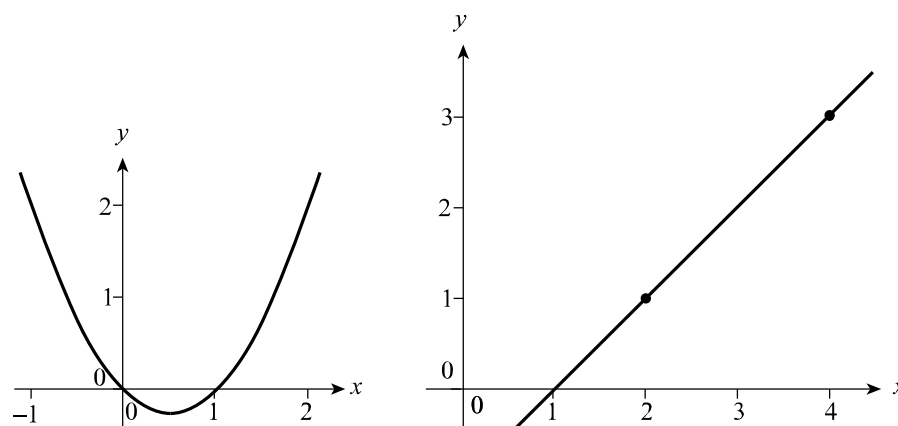
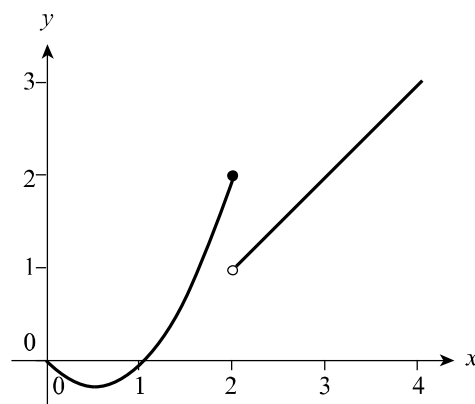
$$f(2) = 2^2 - 2 = 2$$

$$f(3) = 3 - 1 = 2$$

$$f(4) = 4 - 1 = 3$$

ג. הפונקציה f מוגדרת כהדבקה של הפונקציות $f_1(x) = x^2 - x$ (בקטע $[0, 2]$)ו- $f_2(x) = x - 1$ (בקטע $(2, 4]$).

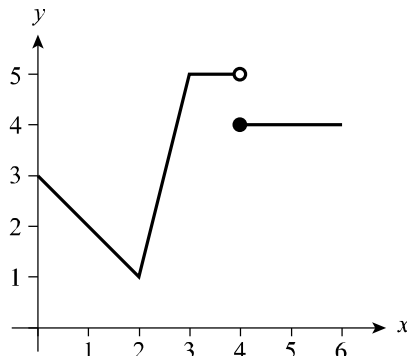
f_1 היא פונקציה ריבועית, ולכן הגרף שלה (על פני כל הישר) הוא פרבולה; f_2 היא פונקציה ליניארית, ולכן הגרף שלה הוא קו ישר. בדומה לשאלות קודמות, נשרטט את הגרפים של פונקציות אלה: לגבי f_1 נמצא את קודקוד הפרבולה ואת נקודות החיתוך שלה עם הצירים; לגבי f_2 נתווה שתי נקודות על הגרף ונעביר קו ישר ביניהן. הגרפים המתקבלים הם:

הגרף של f מתקבל כהדבקה של הגרפים של f_1, f_2 :

השאלה בעמוד 70

תשובה 16

נתון הגרף:



עבור $0 \leq x \leq 2$ הפונקציה מתלכדת עם פונקציה לינארית f_1 המקיימת $f_1(0) = 3$ ו- $f_1(2) = 1$. שיפוע הפונקציה הוא

$$\frac{f_1(2) - f_1(0)}{2 - 0} = \frac{1 - 3}{2} = -1$$

ניעזר בנוסחה לפונקציה לינארית לפי ערך בנקודה ושיפוע:

$$f_1(x) = f_1(0) + (-1) \cdot (x - 0) = 3 - x$$

עבור $2 \leq x \leq 3$ הפונקציה מתלכדת עם פונקציה לינארית f_2 המקיימת $f_2(2) = 1$ ו- $f_2(3) = 5$. שיפוע הפונקציה הוא

$$\frac{f_2(3) - f_2(2)}{3 - 2} = \frac{5 - 1}{1} = 4$$

והפונקציה היא

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_2(2) + 4(x - 2) \\ &= 1 + 4(x - 2) = 4x - 7 \end{aligned}$$

עבור $3 \leq x < 4$ הפונקציה מתלכדת עם הפונקציה הקבועה $f_3(x) = 5$.

עבור $4 \leq x \leq 6$ הפונקציה מתלכדת עם הפונקציה הקבועה $f_4(x) = 4$.

לכן הגדרת הפונקציה שבגרף היא:

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x & 0 \leq x \leq 2 \\ 4x - 7 & 2 < x \leq 3 \\ 5 & 3 < x < 4 \\ 4 & 4 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

השאלה בעמוד 74

תשובה 17

א. $\lfloor 0.1 \rfloor = 0$ (כי $0 \leq 0.1 < 1$).

ב. $\lfloor 11.23 \rfloor = 11$ (כי $11 \leq 11.23 < 12$).

ג. $\lfloor 12/5 \rfloor = \lfloor 2.4 \rfloor = 2$ (כי $2 \leq 2.4 < 3$).

ד. $\lfloor -1.3 \rfloor = -2$ (כי $-2 \leq -1.3 < -1$).

ה. $\langle 1.3 \rangle = 1.3 - \lfloor 1.3 \rfloor = 1.3 - 1 = 0.3$

ו. $\langle -1.3 \rangle = (-1.3) - \lfloor -1.3 \rfloor = (-1.3) - (-2) = 0.7$

השאלה בעמוד 75

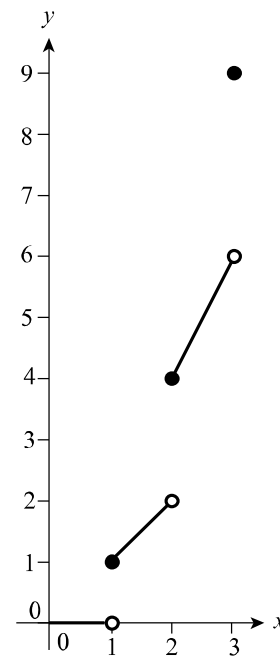
תשובה 18

נתונה הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot x$.לכל $0 \leq x < 1$ מתקיים $\lfloor x \rfloor = 0$, ולכן $f(x) = 0$.לכל $1 \leq x < 2$ מתקיים $\lfloor x \rfloor = 1$, ולכן $f(x) = x$.לכל $2 \leq x < 3$ מתקיים $\lfloor x \rfloor = 2$, ולכן $f(x) = 2x$.עבור $x = 3$ מתקיים $\lfloor x \rfloor = 3$, ולכן $f(x) = 9$.

לכן נוכל לבטא את הפונקציה כהדבקה

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ x & 1 \leq x < 2 \\ 2x & 2 \leq x < 3 \\ 9 & x = 3 \end{cases}$$

ובהתאם, גרף הפונקציה נראה כך:



השאלה בעמוד 76

תשובה 19

א. הפונקציה $f(x) = 3x + 2$ היא חח"ע. נוכיח זאת:אם x_1 ו- x_2 הם מספרים ממשיים המקיימים $f(x_1) = f(x_2)$

$$3x_1 + 2 = 3x_2 + 2 \quad \text{אז}$$

$$\Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \quad \text{נחסר 2 משני האגפים:}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \quad \text{נחלק ב-3:}$$

הוכחנו את הגרירה $x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$, לכן f חח"ע.

ב. נתונה הפונקציה $f(x) = 1/x$. תחום ההגדרה של f הוא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. נשים לב שלכל x בתחום ההגדרה מתקיים: $f(x) \neq 0$. ואכן, אילו היה מתקיים $1/x = 0$, הכפלת שני האגפים ב- x הייתה נותנת $1 = 0$, וזו סתירה.

כעת נניח ש- x_1 ו- x_2 נמצאים בתחום ההגדרה של f ומקיימים:

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} \quad \text{נקבל}$$

לפי מה שהוכחנו, שני אגפי השוויון שונים מ-0. לכן ניתן לבצע "1 חלקי" לשוויון זה.

$$1 : \frac{1}{x_1} = 1 : \frac{1}{x_2} \quad \text{נקבל:}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

לכן f חח"ע.

ג. הפונקציה $f(x) = |x|$ אינה חח"ע כי מתקיים, למשל:

$$f(-1) = |-1| = 1 = |1| = f(1)$$

ד. הפונקציה $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ המוגדרת על ידי $f(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ אינה חח"ע, כי למשל:

$$f(0) = \lfloor 0 \rfloor = 0$$

$$f(1) = \lfloor 1/2 \rfloor = 0$$

ולכן $f(0) = f(1)$.

ה. A היא קבוצת המילים בספר זה, B היא קבוצת האותיות בעברית, ו- $f: A \rightarrow B$ מוגדרת על ידי $f(a) =$ האות הראשונה במילה a .

f אינה חח"ע: לדוגמה, $f(\text{'נ'נ'נ'}) = f(\text{'נ'נ'נ'}) = \text{'נ'}$

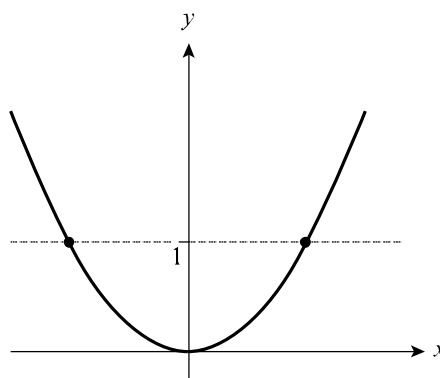
ו. כעת הפונקציה היא: $f(a) =$ המילה a בהיפוך סדר האותיות. f היא חח"ע, כי ניתן לשחזר את המילה a בהינתן היפוכה. כל שיש לעשות הוא להפוך שוב. למשל, אם נתון ש- $f(a) = \text{'ה'צ'ק'נ'פ'}$, נקרא את a מהסוף להתחלה ונמצא ש- $f(a) = \text{'פ'נ'ק'צ'י'ה'}$.

תשובה 20

א. בהינתן פונקציה ממשית f , כדי לבדוק אם f היא חח"ע, יש לבדוק אם כל ערך של הפונקציה מתקבל פעם אחת בלבד, כלומר אין שתי נקודות על גרף הפונקציה בעלות שיעורי- x שונים ושיעור- y זהה. דבר זה שקול לכך שכל ישר מקביל לציר ה- x פוגש את גרף הפונקציה לכל היותר פעם אחת.

השאלה בעמוד 77

ב. עבור הפונקציה $f(x) = x^2$ ניתן לראות שהישר $y = 1$ פוגש את גרף הפונקציה בשתי נקודות:



לכן הפונקציה אינה חח"ע.

השאלה בעמוד 78

תשובה 21

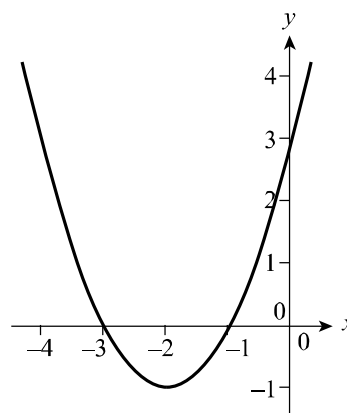
נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 + 4x + 3$. גרף הפונקציה הוא פרבולה.

שיעורי קודקוד הפרבולה נתונים על ידי:

$$x = -\frac{4}{2} = -2$$

$$y = f(-2) = -1$$

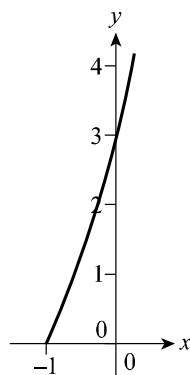
גרף הפונקציה נראה כך:



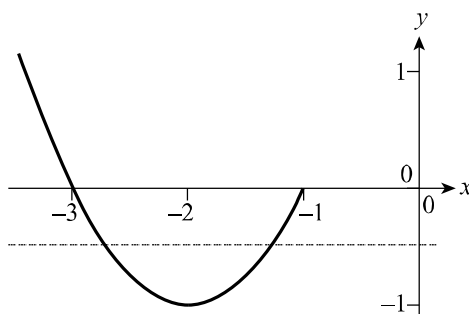
◁ לצורך פתרון שאלה זו מספיק למצוא את קודקוד הפרבולה ואין הכרח למצוא במדויק את נקודות המפגש עם הצירים.

א. f אינה חח"ע. למשל, הישר המקביל לציר ה- x הפוגש את ציר ה- y בנקודה 1, פוגש את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

ב. $f|_{[-1, \infty)}$ היא חח"ע, כי חלק הגרף הרלוונטי פוגש כל ישר אופקי בנקודה אחת לכל היותר:



ג. $f|_{(-\infty, -1)}$ אינה חח"ע. חלק הגרף הרלוונטי נראה כך:



לדוגמה, הישר המקביל לציר ה- x הפוגש את ציר ה- y בנקודה $-1/2$, פוגש את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

השאלה בעמוד 80

תשובה 22

א. נתונה הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$.

בהינתן $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ המקיימים $f(x_1) = f(x_2)$, נקבל $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$.

נחסר 1 ונקבל $2x_1 = 2x_2$, נחלק ב-2 ונקבל $x_1 = x_2$. לכן f חח"ע.

קעת נוכיח ש- f היא על. יהי $b \in \mathbb{R}$, ונתבונן במשוואה $f(a) = b$:

$$\Leftrightarrow 2a + 1 = b$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{b-1}{2}$$

קיבלנו שלמשוואה זו יש תמיד פתרון. לכן f היא על.

ב. נתונה הפונקציה $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = x + 1$.

נוודא שהפונקציה מוגדרת היטב:

לכל x בתחום הפונקציה מתקיים $x \geq 0$, לכן $x + 1 \geq 1$ ובפרט $x + 1 \geq 0$.

וידאנו שמתקיים $f(x) \in [0, \infty)$, כלומר ש- $f(x)$ שייך לטווח הפונקציה.

לכן, f מוגדרת היטב.

נוכיח ש- f חח"ע:

אם $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ מקיימים $f(x_1) = f(x_2)$, אז $x_1 + 1 = x_2 + 1$, לכן $x_1 = x_2$.

לכן, f חח"ע.

f אינה על, כי המספר 0 שייך לטווח הפונקציה, אך לא קיים a בתחום הפונקציה כך

ש- $f(a) = 0$, כי לפי מה שהוכחנו לעיל, לכל a בתחום הפונקציה מתקיים $f(a) \geq 1$.

ג. נתונה הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$.

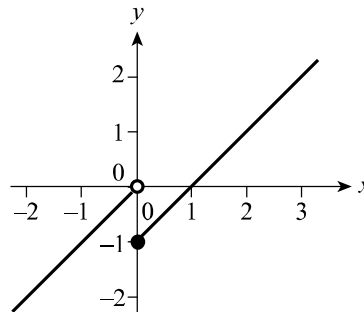
הפונקציה אינה חח"ע, כי למשל, $\lfloor 1 \rfloor = \lfloor 1.1 \rfloor = 1$, ולכן $f(1) = f(1.1)$.

הפונקציה אינה על, כי, למשל, המספר $b = 0.5$ שייך לטווח הפונקציה, אך לא קיים a

ממשי כך ש- $f(a) = b$, כי $f(a) = b$ הוא מספר שלם לכל a ממשי, ו- b אינו מספר שלם.

ד. נתונה הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$,

נתבונן בגרף הפונקציה:



מהגרף ניתן לראות ש- f אינה חח"ע. ניתן להוכיח זאת במדויק כך:

$$f(0) = f(-1) = -1 \text{ ולכן } f \text{ אינה חח"ע.}$$

מהגרף הפונקציה ניתנת לראות ש- f היא על: כל ישר אופקי פוגש את גרף הפונקציה. ניתן

להוכיח זאת במדויק כך: לכל b ממשי, אם $b < 0$ אז $b = f(b)$, ואם $b \geq 0$ אז בוודאי

$b+1 \geq 0$ ולכן $f(b+1) = (b+1)-1 = b$. לכן בכל מקרה b הוא ערך של הפונקציה

f .

השאלה בעמוד 81

תשובה 23

א. ראינו בשאלה 22 שהפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+1$ היא על. לכן תמונתה

היא קבוצת המספרים הממשיים כולה: $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

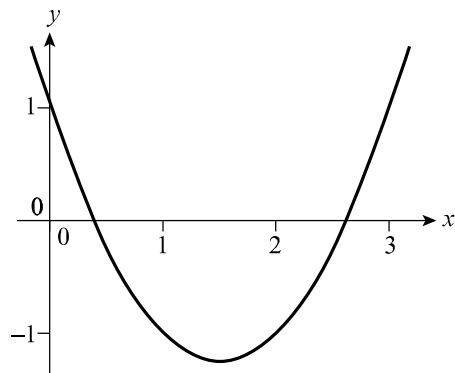
ב. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 - 3x + 1$. גרף הפונקציה הוא פרבולה חיובית, ששיעורי

קודקודה הם:

$$x = \frac{3}{2}$$

$$y = f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -\frac{5}{4}$$

נתבונן בגרף הפונקציה:



היטל הגרף על ציר ה- y הוא הקבוצה $\{b | b \geq -5/4\}$, כלומר הקטע $[-5/4, \infty)$.
לכן $\text{Im } f = [-5/4, \infty)$.

ניתן להוכיח זאת ללא שימוש בגרף כך: מספר ממשי b הוא בתמונת הפונקציה f אם ורק אם קיים פתרון למשוואה

$$x^2 - 3x + 1 = b$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + (1 - b) = 0$$

משוואה זו היא משוואה ריבועית:
נחשב את הדיסקרימיננטה של משוואה זו:

$$D = 3^2 - 4 \cdot (1 - b) = 9 - 4 + 4b = 5 + 4b$$

למשוואה יש פתרון אם ורק אם $D \geq 0$, מה ששקול לאי-שוויון:

$$5 + 4b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4b \geq -5 \Leftrightarrow b \geq -\frac{5}{4}$$

לכן $b \in \text{Im } f$ אם ורק אם $b \geq -5/4$, כלומר $\text{Im } f = [-5/4, \infty)$.

$$f(x) = \frac{1}{x} + 1$$

ג. נתונה הפונקציה

תחום ההגדרה של הפונקציה הוא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

לכל x ממשי מתקיים (כפי שראינו בתשובה 19) $1/x \neq 0$.

מכאן נובע ש- $1/x + 1 \neq 1$, כי אילו היה מתקיים $1/x + 1 = 1$, אז היה נובע ש- $1/x = 0$, בסתירה למה שהוכחנו בעבר.

קעת יהי b מספר ממשי, ונניח ש- $b \neq 1$.

$$f(a) = b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a} + 1 = b \Leftrightarrow \frac{1}{a} = b - 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{b - 1}$$

ראינו שלמשוואה זו יש פתרון, לכן b שייך לתמונת הפונקציה f .

לסיכום, הוכחנו ש- $f(x) \neq 1$ לכל x , ושכל $b \neq 1$ הוא ערך של הפונקציה f . לכן

$$\text{Im } f = \{x | x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

- ד. נתונה הפונקציה $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.
 לכל $x \in [0, \infty)$ מתקיים $x \geq 0$, ולכן $f(x) = x + 1 \geq 1$.
 כעת יהי $b \geq 1$. ניתן להציג: $b = (b - 1) + 1$.
 המספר $b - 1$ מקיים: $b - 1 \geq 0$, כלומר $b - 1$ שייך לתחום ההגדרה של f , לכן
 $b = f(b - 1)$.
 ראינו שכל ערכי f שייכים לקטע $[1, \infty)$, ושכל מספר בקטע $[1, \infty)$ הוא ערך של f .
 לכן $\text{Im } f = [1, \infty)$.
- ה. נתונה הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (פונקציית החלק השלם). לפי ההגדרה, כל ערכי f הם מספרים שלמים. בכיוון ההפוך, כל מספר שלם הוא ערך של f , כי לכל $n \in \mathbb{Z}$ מתקיים
 $\lfloor n \rfloor = n = f(n)$. לכן $\text{Im } f = \mathbb{Z}$.
- ו. נתונה $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.
 לכל x בתחום ההגדרה של f מתקיים $x \geq 0$, ולכן $-x \leq 0$.
 לכל $b \leq 0$ נוכל לבטא $b = -(-b)$ ומתקיים $-b \geq 0$, לכן $-b$ בתחום ההגדרה של f .
 מכאן ש- $b = f(-b)$.
 הוכחנו שכל ערכי f נמצאים בקטע $(-\infty, 0]$, ושכל מספר בקטע זה הוא ערך של f .
 לכן $\text{Im } f = (-\infty, 0]$.

השאלה בעמוד 82

תשובה 24

נתונה פונקציית הערך המוחלט: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.
 לכל x ממשי מתקיים $f(x) \geq 0$.
 לכל $b \geq 0$ מתקיים $|b| = b$ ולכן $b = f(b)$. לכן $\text{Im } f = [0, \infty)$.
 אם נגדיר מראש $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = |x|$, נקבל שפונקציה זו היא על.

השאלה בעמוד 83

תשובה 25

תהי f פונקציה אי־זוגית המוגדרת בנקודה 0.
 לפי הנתון, לכל x בתחום ההגדרה של f מתקיים
 $f(-x) = -f(x)$
 בפרט, עבור $x = 0$, מתקבל:
 $f(0) = -f(0)$
 נעביר אגפים:
 $\Rightarrow 2f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
 הוכחנו ש- $f(0) = 0$, כנדרש.

השאלה בעמוד 85

תשובה 26

נניח ש- f פונקציה לינארית עם שיפוע חיובי, כלומר:
 $f(x) = ax + b$, $a > 0$
 יהיו x_1, x_2 מספרים ממשיים המקיימים $x_1 < x_2$.
 נכפיל ב- a (כיוון האי־שוויון נשמר כי $a > 0$):
 $\Rightarrow ax_1 < ax_2$
 נוסיף b לשני האגפים:
 $\Rightarrow ax_1 + b < ax_2 + b$
 קיבלנו ש- $f(x_1) < f(x_2)$. לכן f עולה.

כעת נניח שהשיפוע, a , שלילי.

נניח, כמקודם:

$$x_1 < x_2$$

$$\Rightarrow ax_1 > ax_2$$

$$\Rightarrow ax_1 + b > ax_2 + b$$

נכפיל ב- a (כיוון האי-שוויון מתהפך כי a שלילי):

נוסיף b לשני האגפים:

קיבלנו ש- $f(x_1) > f(x_2)$. בכך הוכחנו ש- f יורדת.

השאלה בעמוד 85

תשובה 27

א. נתבונן בפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$. תחום ההגדרה של f הוא $[0, \infty)$.

כדי להוכיח ש- f עולה, נניח ש- $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, כלומר $x_1 \geq 0$ ו- $x_2 \geq 0$,

וש- $x_1 < x_2$, ונוכיח ש- $f(x_1) < f(x_2)$:

כפי שראינו בשאלה 43 בשיעור 5, מכך ש- $0 \leq x_1 < x_2$, נובע ש- $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$,

כנדרש. לכן f עולה.

ב. כעת תהי $f(x) = -\sqrt{x}$. נוכיח ש- f יורדת:

תחום ההגדרה של f הוא $[0, \infty)$.

נניח ש- $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ וש- $x_1 < x_2$.

ממה שהוכחנו בסעיף א נובע ש- $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. לכן (על פי תכונת היפוך האי-שוויון)

כלומר $-\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2}$, $f(x_1) > f(x_2)$. לכן f יורדת.

השאלה בעמוד 85

תשובה 28

א. נתון ש- f עולה וש- x_1, x_2 בתחום ההגדרה של f . אם $x_1 < x_2$, אז לפי הגדרת

פונקציה עולה, $f(x_1) < f(x_2)$.

בכיוון ההפוך, נניח שמתקיים $f(x_1) < f(x_2)$ ונוכיח ש- $x_1 < x_2$:

אם $x_1 = x_2$, אז $f(x_1) = f(x_2)$, בסתירה להנחה.

אם $x_1 > x_2$, אז (מכיוון ש- f עולה) $f(x_1) > f(x_2)$, שוב בסתירה להנחה.

לכן תיתכן רק האפשרות ש- $x_1 < x_2$, כפי שרצינו להוכיח.

ב. ההוכחה כמעט זהה:

נתון ש- f יורדת וש- $x_1 < x_2$ בתחום ההגדרה של f . אם $x_1 < x_2$, אז לפי הגדרת

פונקציה יורדת, $f(x_1) > f(x_2)$.

בכיוון ההפוך, נניח שמתקיים $f(x_1) > f(x_2)$ ונוכיח ש- $x_1 < x_2$:

אם $x_1 = x_2$, אז $f(x_1) = f(x_2)$, בסתירה להנחה. אם $x_1 > x_2$, אז (מכיוון ש- f

יורדת) $f(x_1) < f(x_2)$, שוב בסתירה להנחה. לכן תיתכן רק האפשרות ש- $x_1 < x_2$,

כפי שרצינו להוכיח.

השאלה בעמוד 87

תשובה 29

תהי $f(x) = x^3$.טענה 1: הפונקציה f עולה בקטע $[0, \infty)$.

הוכחה: נניח ש- $0 \leq x_1 < x_2$. לפי שאלה 43 בשיעור 5, $x_1^3 < x_2^3$, כלומר $f(x_1) < f(x_2)$, כנדרש.

טענה 2: הפונקציה f עולה בקטע $(-\infty, 0]$.הוכחה: נניח ש- $x_1 < x_2 \leq 0$.מכאן נקבל: $-x_1 > -x_2 \geq 0$ לפי טענה 1: $f(-x_1) > f(-x_2)$ הפונקציה f אי־זוגית, לכן: $f(-x_1) = -f(x_1)$, $f(-x_2) = -f(x_2)$ מכאן נובע: $-f(x_1) > -f(x_2)$ ולכן (לפי תכונת היפוך האי־שוויון), $f(x_1) < f(x_2)$

כנדרש.

טענה 3: הפונקציה f עולה בכל הישר.הוכחה: נניח ש- x_1, x_2 הם מספרים ממשיים כלשהם המקיימים $x_1 < x_2$.

תיתכנה 3 אפשרויות:

א) $0 \leq x_1 < x_2$ ב) $x_1 < 0 \leq x_2$ ג) $x_1 < x_2 \leq 0$ באפשרות א מתקיים $x_1, x_2 \in [0, \infty)$, ולכן לפי טענה 1, $f(x_1) < f(x_2)$.

באפשרות ב מתקיים $f(x_1) = x_1^3 < 0$ (x_1^3 הוא מכפלה של מספר אי־זוגי של מספרים שליליים) וכן $f(x_2) = x_2^3 \geq 0$ (x_2^3 הוא מכפלה של מספרים אי־שליליים) ולכן $f(x_1) < f(x_2)$, כלומר $f(x_1) < 0 \leq f(x_2)$.

באפשרות ג מתקיים $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$, ולכן לפי טענה 2, $f(x_1) < f(x_2)$.לכן בכל מקרה, $f(x_1) < f(x_2)$, ומכאן ש- f עולה.

תשובה 30

א. נניח ש- n זוגי, ותהי $f(x) = x^n$.אם $0 \leq x_1 < x_2$, אז לפי שאלה 43 בשיעור 5, $x_1^n < x_2^n$. לכן f עולה בקטע $[0, \infty)$.אם $x_1 < x_2 \leq 0$, אז $-x_1 > -x_2 \geq 0$, ולפי מה שזה עתה הוכחנו, $f(-x_1) > f(-x_2)$. f היא פונקציה זוגית ולכן $f(x_1) > f(x_2)$. לכן f יורדת בקטע $(-\infty, 0]$.ב. נניח ש- n אי־זוגי, ותהי $f(x) = x^n$.

ההוכחה ש- f פונקציה עולה זהה להוכחה בתשובה 29: תחילה מוכיחים ש- f עולה ב- $[0, \infty)$ (לפי שאלה 43 בשיעור 5); אחר כך מוכיחים ש- f עולה ב- $(-\infty, 0]$ (בהסתמך על כך ש- f עולה ב- $[0, \infty)$ ועל כך ש- f פונקציה אי־זוגית); לבסוף מוכיחים ש- f עולה בכל הישר, בהסתמך על עלייתה בשני הקטעים $[0, \infty)$ ו- $(-\infty, 0]$.

◁ אלה הן 3 האפשרויות למקם את 0 ביחס לנקודות $x_1 < x_2$ על הישר.

השאלה בעמוד 87

תשובה 31

תהי $f(x) = 1/x$.

א. נוכיח ש- f פונקציה אי-זוגית:

נניח ש- x שייך לתחום ההגדרה של f , כלומר $x \neq 0$. אז

$$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$$

כנדרש.

ב. נוכיח ש- f יורדת בקטע $(0, \infty)$:

אם $0 < x_1 < x_2$, אז נוכל לבצע "חלקי" לא-שוויון החיובי $x_1 < x_2$. נקבל:

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

כלומר, $f(x_1) > f(x_2)$. לכן f יורדת בקטע זה.

נוכיח ש- f יורדת בקטע $(-\infty, 0)$:

אם $x_1 < x_2 < 0$, אז $-x_1 > -x_2 > 0$, ולכן, לפי מה שהוכחנו, $f(-x_1) > f(-x_2)$.

מכיוון ש- f פונקציה אי-זוגית, נקבל: $-f(x_1) < -f(x_2)$ ולכן $f(x_1) > f(x_2)$.

כנדרש.

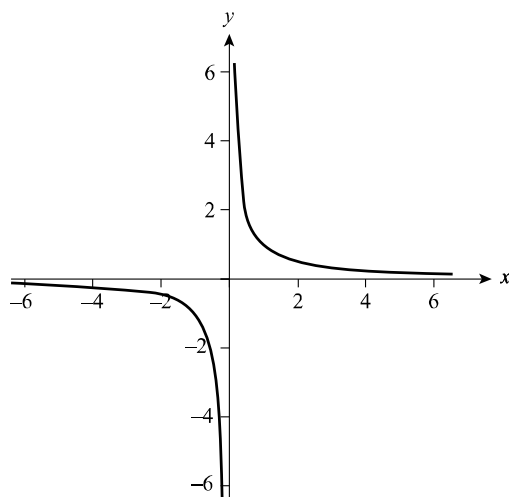
ג. תחום ההגדרה של f הוא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

נתבונן במספרים $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. ערכי הפונקציה בהם הם:

$$f(x_1) = \frac{1}{-1} = -1; \quad f(x_2) = \frac{1}{1} = 1$$

לכן $f(x_1) < f(x_2)$. אבל $x_1 < x_2$, ולכן אילו f הייתה יורדת בתחום הגדרתה, היה

נובע ש- $f(x_1) > f(x_2)$. לכן f לא יורדת בכל תחום הגדרתה.



הערה: תופעה זו עשויה להיראות תמוהה:

f יורדת ב- $(-\infty, 0)$ ויורדת גם ב- $(0, \infty)$,

אך לא יורדת באיחוד שני הקטעים. עיון

בגרף הפונקציה נותן לכך הסבר: הפונקציה

לא מוגדרת בנקודה $x = 0$. לכן ציר ה- y

מפריד בין חלק הגרף השמאלי שבו ערכי

הפונקציה שליליים לחלק הגרף הימני שבו

ערכי הפונקציה חיוביים.

השאלה בעמוד 90

תשובה 32

נתונה הפונקציה $f(x) = (\langle x \rangle)^2$.

בשיעור הוכחנו שמתקיים לכל x :

נעלה בריבוע:

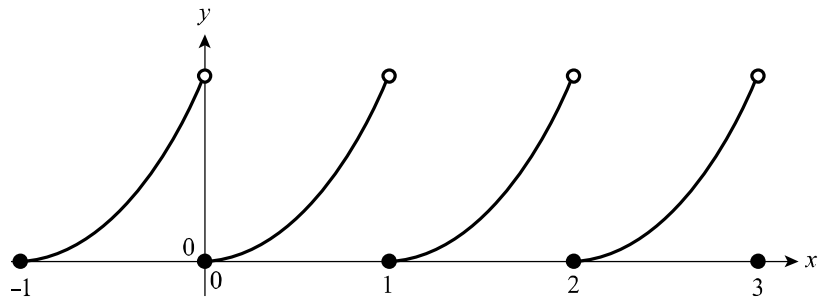
$$\begin{aligned}\langle x-1 \rangle &= \langle x \rangle = \langle x+1 \rangle \\ \Rightarrow \langle x-1 \rangle^2 &= \langle x \rangle^2 = \langle x+1 \rangle^2 \\ \Rightarrow f(x-1) &= f(x) = f(x+1)\end{aligned}$$

לכן f מחזורית.

לכל $0 \leq x < 1$ מתקיים $\langle x \rangle = x$, ולכן $f(x) = \langle x \rangle^2 = x^2$.

גרף הפונקציה מתקבל, לפיכך, מגרף הפונקציה $g(x) = x^2$ בקטע $[0,1)$ על ידי הדבקה

חוזרת ונשנית:



השאלה בעמוד 91

תשובה 33

נתונות הפונקציות $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$, $g(x) = \frac{x+2}{x+3}$

תחום ההגדרה של f הוא $\{x | x \neq -2\}$, ותחום ההגדרה של g הוא $\{x | x \neq -3\}$.

לכן תחום ההגדרה של $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ הוא אוסף הנקודות המשותפות לשני תחומי

ההגדרה, כלומר:

$$\{x | x \neq -2, x \neq -3\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$$

כעת נמצא את הביטויים לפונקציות אלה.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{(x+1)(x+3) + (x+2)^2}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{x^2 + 4x + 3 + x^2 + 4x + 4}{x^2 + 5x + 6} = \frac{2x^2 + 8x + 7}{x^2 + 5x + 6}\end{aligned}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+3} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{(x+1)(x+3) - (x+2)^2}{(x+2)(x+3)} \\ &= \frac{(x^2 + 4x + 3) - (x^2 + 4x + 4)}{(x+2)(x+3)} = \frac{-1}{x^2 + 5x + 6}\end{aligned}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{x+1}{x+3} \quad \text{ג.}$$

שימו לב לכך שתחום ההגדרה של fg , שהוא כאמור $\mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$, קטן יותר מתחום ההגדרה של הביטוי $\frac{x+1}{x+3}$, שהוא $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. דבר זה נובע מהדרך שבה הוגדרה הפונקציה fg .

ד. תחום ההגדרה של f/g הוא אוסף ה- x ים שעבורם מוגדרים $f(x), g(x)$ וגם מתקיים $g(x) \neq 0$. הדרישה $g(x) \neq 0$ אינה מוסיפה תנאי חדש, כי עבור $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$ מתקיים ממילא $x+2 \neq 0$ ו- $x+3 \neq 0$, ולכן $g(x) \neq 0$. לכן תחום ההגדרה של f/g הוא $\mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$. ערכי הפונקציה הם:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{x+2} : \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 4}$$

במקרה זה ניתן לפשט עוד יותר:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 4x + 4 - 1}{x^2 + 4x + 4} = 1 - \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$$

ה. תחום ההגדרה של f^2 זהה לתחום ההגדרה של f . לכן תחום ההגדרה של $f^2 - g$ זהה לתחום ההגדרה המשותף של f ו- g , והוא, כמקודם, $\mathbb{R} \setminus \{-2, -3\}$. ערכי הפונקציה הם:

$$\begin{aligned} (f^2 - g)(x) &= f^2(x) - g(x) = (f(x))^2 - g(x) = \left(\frac{x+1}{x+2}\right)^2 - \frac{x+2}{x+3} \\ &= \frac{(x+1)^2}{(x+2)^2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+1)^2(x+3) - (x+2)^3}{(x+2)^2(x+3)} \end{aligned}$$

נפשט בנפרד:

$$\begin{aligned} (x+1)^2(x+3) &= (x^2 + 2x + 1)(x+3) \\ &= (x^2 + 2x + 1) \cdot x + (x^2 + 2x + 1) \cdot 3 \\ &= x^3 + 2x^2 + x + 3x^2 + 6x + 3 \\ &= x^3 + 5x^2 + 7x + 3 \end{aligned}$$

לפי נוסחת הבינום:

$$(x+2)^3 = x^3 + 3x^2 \cdot 2 + 3x \cdot 2^2 + 2^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(x+1)^2(x+3) - (x+2)^3 = -x^2 - 5x - 5 \quad \text{נחסר:}$$

כמו כן:

$$\begin{aligned} (x+2)^2(x+3) &= (x^2 + 4x + 4)(x+3) \\ &= (x^2 + 4x + 4) \cdot x + (x^2 + 4x + 4) \cdot 3 \\ &= x^3 + 4x^2 + 4x + 3x^2 + 12x + 12 \\ &= x^3 + 7x^2 + 16x + 12 \end{aligned}$$

$$(f^2 - g)(x) = -\frac{x^2 + 5x + 5}{x^3 + 7x^2 + 16x + 12} \quad \text{לכן:}$$

תשובה 34

א. נתונות: $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x$.

הפונקציות f ו- g מוגדרות בכל הישר, לכן לכל x ממשי, g מוגדרת ב- x ו- f מוגדרת ב- $g(x)$. לכן תחום ההגדרה של $f \circ g$ הוא $\mathbb{R}$.

נדגים את חישוב $f \circ g$ בעזרת משתנה עזר.

$$\begin{aligned} f(t) &= t^3 & \text{נחליף את שם המשתנה בהגדרת הפונקציה } f: \\ f(g(x)) &= (2x)^3 = 8x^3 & \text{נציב } t = 2x \\ (f \circ g)(x) &= 8x^3 & \text{ולכן} \end{aligned}$$

ב. נתונות: $f(x) = x/(x-1)$, $g(x) = |x|$.

כדי ש- $f(g(x))$ יהיה מוגדר, נדרש ש- $g(x) = |x|$ יהיה בתחום ההגדרה של f , כלומר $|x| \neq 1$. השוויון $|x| = 1$ מתקיים אם ורק אם $x = -1$ או $x = 1$. לכן תחום ההגדרה של f הוא $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{|x|}{|x| - 1} \quad \text{ההרכבה היא:}$$

ג. נתונות: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 3x - 5$.

תחום ההגדרה של f הוא $[0, \infty)$.

כדי ש- $f(g(x))$ יהיה מוגדר, נדרש להתקיים $3x - 5 \geq 0$. אי-שוויון זה שקול ל:

$$\Leftrightarrow 3x \geq 5 \Leftrightarrow x \geq 5/3$$

לכן תחום ההגדרה של $f \circ g$ הוא $[5/3, \infty)$.

$$(f \circ g)(x) = \sqrt{3x - 5} \quad \text{ההרכבה היא:}$$

ד. נתונות: $f(x) = g(x) = 1/x$.

תחום ההגדרה של שתי הפונקציות הוא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

לכל $x \neq 0$ מתקיים $1/x \neq 0$ (ראו תשובה 19), לכן תחום ההגדרה של $f \circ g$ הוא $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x \quad \text{ההרכבה היא:}$$

ה. נתונות: $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x+1}{x+3}$.

תחום ההגדרה של f הוא $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ותחום ההגדרה של g הוא $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

כדי ש- $f(g(x))$ יהיה מוגדר, נדרש להתקיים $x \neq -3$, וגם $g(x) \neq 2$.

נבדוק מתי מתקיים $g(x) = 2$:

$$g(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+3} = 2$$

נניח ש- $x \neq -3$ (דרישה הקיימת ממילא כדי ש- $g(x)$ יהיה מוגדר). תחת הנחה זו נכפול

$$\text{ב-} x+3:$$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = 2(x+3) \Leftrightarrow 2x+1 = 2x+6 \Leftrightarrow 1 = 6$$

הגענו לסתירה, לכן לא קיים x שעבורו $g(x) = 2, x \neq -3$.
 לכן $f(g(x))$ מוגדר לכל $x \neq -3$, כלומר תחום ההגדרה של $f \circ g$ הוא $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
 כדי לחשב את ההרכבה נציג:

$$f(t) = \frac{t-1}{t-2}$$

$$: t = g(x) = \frac{2x+1}{x+3} \text{ נציב}$$

$$f(g(x)) = \frac{\frac{2x+1}{x+3} - 1}{\frac{2x+1}{x+3} - 2}$$

נכפיל את המונה והמכנה ב־ $x+3$ (מספר זה שונה מ־0 כש־ x שייך לתחום ההגדרה של $f \circ g$):

$$= \frac{2x+1-(x+3)}{2x+1-2(x+3)} = \frac{x-2}{-5} = \frac{2-x}{5}$$

קיבלנו כי $(f \circ g)(x) = (2-x)/5$.

ו. נתונות: $f(x) = 2x$, $g(x) = x^3$.

שתי הפונקציות מוגדרות בכל הישר, ולכן גם הרכבתן מוגדרת בכל הישר.

ההרכבה היא: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2x^3$

השאלה בעמוד 95

תשובה 35

א. נתונה הפונקציה $f(x) = x/2$.

f מוגדרת בכל הישר, לכן $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

f היא פונקציה לינארית בעלת שיפוע חיובי, לכן f עולה, ולכן f חח"ע.

לכל $y \in \mathbb{R}$ מתקיימות השקילויות הבאות:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x}{2} = y \Leftrightarrow x = 2y$$

משקילויות אלה נובע ש־ f היא על (כי לכל y קיים x כך ש־ $f(x) = y$). לכן תמונת f היא $\mathbb{R}$.

משקילויות אלה נובע גם ש־ $f^{-1}(y) = 2y$, לכן הפונקציה ההפוכה היא

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f^{-1}(x) = 2x$$

במילים אחרות: הפעולה ההפוכה לחלוקה ב־2 היא הכפלה ב־2.

ב. נתונה הפונקציה: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$.

לכל x בתחום ההגדרה של f מתקיים $x^2 \geq 0$, ולכן:

$$f(x) = x^2 + 1 \geq 1$$

לכל $y \geq 1$ מתקיימות השקילויות הבאות:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = y - 1$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1}$$

מכאן נובע שתמונת הפונקציה היא $[1, \infty)$: לכל $y \geq 1$ יש $x \geq 0$ המקיים $y = f(x)$.

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$$

בנוסף נובע:

לכן $f^{-1}: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ היא הפונקציה $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

ג. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2, f: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$.

נוכיח ש- f חח"ע. נניח ש- $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ וש- $f(x_1) = f(x_2)$ אז:

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$(-x_1)^2 = (-x_2)^2 \quad \text{מההיות } x^2 = (-x)^2 \text{ נובע}$$

מכך ש- $x_1 \leq 0, x_2 \leq 0$ נקבל ש- $-x_1 \geq 0, -x_2 \geq 0$, כלומר $-x_1, -x_2 \in [0, \infty)$.

הפונקציה $g(x) = x^2$ חח"ע ב- $[0, \infty)$ (כפי שהוכחנו בשיעור) ולכן

$$-x_1 = -x_2$$

מכאן נובע ש- $x_1 = x_2$. לכן f חח"ע.

כעת נמצא את תמונת הפונקציה f : לכל $x \in (-\infty, 0]$ מתקיים $f(x) \geq 0$.

לכל $y \geq 0$ מתקיימת השקילות: $f(x) = y \Leftrightarrow y = x^2, x \in (-\infty, 0]$

פתרון המשוואה $x^2 = y$ הוא (כפי שראינו בשיעור) $x = \pm\sqrt{y}$.

בהינתן ש- $x \leq 0$, פתרון המשוואה הוא $x = -\sqrt{y}$. לכן:

$$f(x) = y \Leftrightarrow x = -\sqrt{y}$$

משקילות זו נסיק שתמונת הפונקציה f היא הקטע $[0, \infty)$.

לכן $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$, ומהשקילות לעיל נובע ש-

$$f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$$

ולכן

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$$

הערה:

ניתן לסכם את ממצאינו כך: הפונקציה $f(x) = x^2$ אינה חח"ע. אם נצמצם אותה לאחד

הקטעים $[0, \infty)$, $(-\infty, 0]$, נקבל פונקציה חח"ע. כל צמצום מייצג חצי מהפרבולה.

כשמצמצמים את f לקטע $[0, \infty)$, מתקבלת הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

כשמצמצמים את f לקטע $(-\infty, 0]$, מתקבלת הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$.

ד. נתון: $f: [1, 3] \rightarrow [5, 7]$, $f(x) = x + 4$.

נוודא ש- f מוגדרת היטב: לכל $x \in [1, 3]$ מתקיים $1 \leq x \leq 3$ ולכן $5 \leq x + 4 \leq 7$,

כלומר $f(x) \in [5, 7]$. לכן f מוגדרת היטב.

f חח"ע, כי אם $x_1 + 4 = x_2 + 4$ אז $x_1 = x_2$.

נוכיח ש- f היא על: לכל $5 \leq y \leq 7$ מתקיים $y = (y - 4) + 4$.

מההנחה ש- $5 \leq y \leq 7$ נובע ש- $1 \leq y - 4 \leq 3$, כלומר $y - 4 \in [1, 3]$.

לכן $y = f(y - 4)$.

הוכחנו שכל $y \in [5, 7]$ הוא ערך של f . לכן f היא על, כלומר $\text{Im } f = [5, 7]$.

כעת נשים לב לשקילות $f(x) = y \Leftrightarrow x + 4 = y \Leftrightarrow x = y - 4$

$$f^{-1}(y) = y - 4$$

לכן

$$f^{-1}(x) = x - 4$$

מכאן נובע ש- $f^{-1}: [5, 7] \rightarrow [1, 3]$ היא הפונקציה

ה. נתון: $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x$.

נתבונן בפונקציה (המוגדרת בישר כולו): $g(x) = x^2 + x$

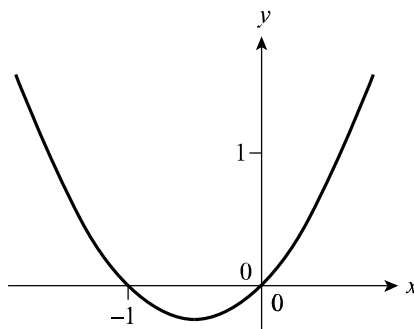
◁ לצורך פתרון שאלה זו מספיק למצוא את קודקוד הפרבולה ואין הכרח למצוא במדויק את נקודות המפגש עם הצירים.

g היא פונקציה ריבועית, לכן הגרף שלה הוא פרבולה. נמצא את קודקודה:

$$x = \frac{-1}{2 \cdot 1} = -\frac{1}{2} \quad \text{שיעור-} x \text{ של הקודקוד הוא}$$

$$y = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \quad \text{שיעור-} y \text{ של הקודקוד הוא:}$$

גרף הפונקציה g נראה כך:



מהגרף ניתן לראות שהפונקציה $f = g|_{[0,\infty)}$ (צמצום הפונקציה הריבועית למספרים האי-שלילים) היא עולה, ולכן חח"ע. כמו כן ניתן לראות שתמונת f היא הקטע $[0,\infty)$.

לכל $y \in [0,\infty)$ נפתור את המשוואה $f(x) = y$, תחת ההנחה ש- $x \geq 0$:

$$\Leftrightarrow x^2 + x = y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \quad \text{לפי נוסחת השורשים של המשוואה הריבועית:}$$

הפתרון $x = \frac{(-1 - \sqrt{1+4y})}{2}$ אינו אפשרי, כי הוא מספר שלילי. לכן:

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{1+4y}}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{4x+1}-1}{2} \quad \text{מצאנו כי } f^{-1}(y) = \frac{(\sqrt{4y+1}-1)}{2} \text{ , ולכן:}$$

תשובה 36

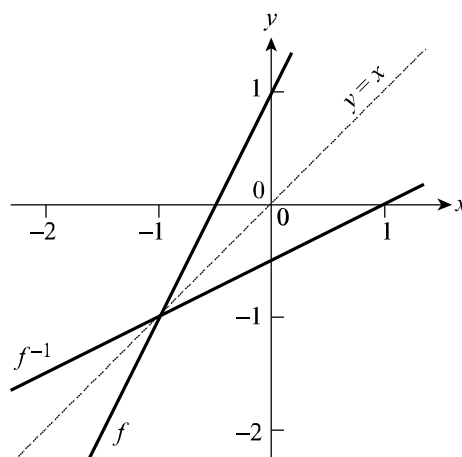
א. מהגרף של $f(x) = 2x + 1$ (ראו להלן) ניתן לראות ש- f חח"ע ועל. כדי למצוא את הפונקציה ההפוכה, נפתור את המשוואה $f(x) = y$

$$\Rightarrow 2x + 1 = y \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{2} \quad \text{לכן}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \quad \text{לכן } f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ היא הפונקציה:}$$

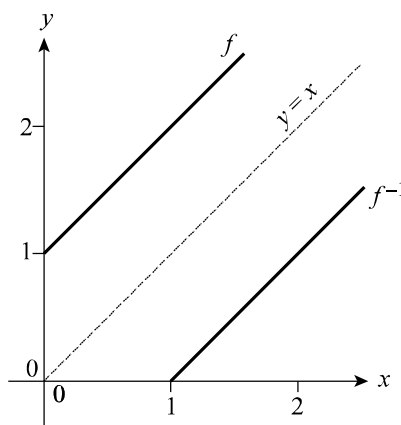
נשרטט יחדיו את הגרפים של f ו- f^{-1} :



ב. נתונה הפונקציה: $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

נוכיח כי תמונת f היא הקטע $[1, \infty)$: לכל $x \geq 0$ מתקיים $f(x) = x + 1 \geq 1$. בכיוון ההפוך, לכל $y \geq 1$ מתקיים $y - 1 \geq 0$ ולכן $y = (y - 1) + 1 = f(y - 1)$, כלומר y הוא ערך של הפונקציה f , לכן $\text{Im } f = [1, \infty)$.

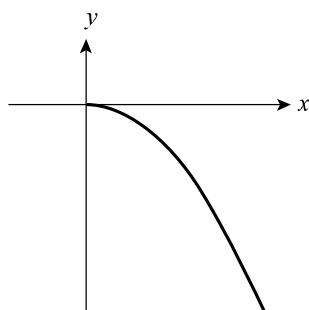
נמצא את f^{-1} : מהמשוואה $f(x) = y$ נובע $x + 1 = y$, כלומר $x = y - 1$. לכן $f^{-1}(y) = y - 1$, ומכאן $f^{-1}(x) = x - 1$. תחום ההגדרה של f^{-1} הוא תמונת f , כלומר הקטע $[1, \infty)$. להלן הגרפים של f ו- f^{-1} :



ג. נתונה הפונקציה $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2$.

גרף הפונקציה (ראו משמאל) הוא החצי הימני של הפרבולה $y = -x^2$:

תמונת הפונקציה היא הקטע $(-\infty, 0]$.



נמצא את הפונקציה ההפוכה:

יהי $y \leq 0$, ונתבונן במשוואה

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ \Rightarrow -x^2 &= y \\ \Rightarrow x &= \sqrt{-y} \end{aligned}$$

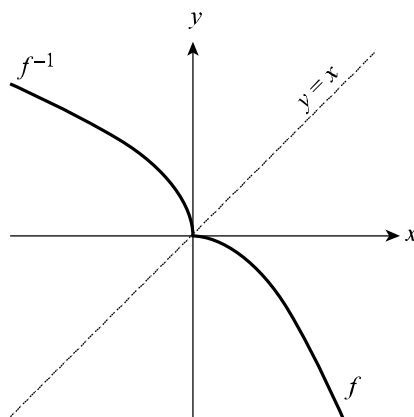
x נדרש לקיים $x \geq 0$, לכן

מכאן נקבל ש- $f^{-1}(y) = \sqrt{-y}$.

לכן $f^{-1} : (-\infty, 0] \rightarrow [0, \infty)$ היא הפונקציה $f^{-1}(x) = \sqrt{-x}$.

גרף הפונקציה הוא שיקוף של גרף הפונקציה $g(x) = \sqrt{x}$ ביחס לציר ה- y .

ביחד מתקבלים הגרפים:

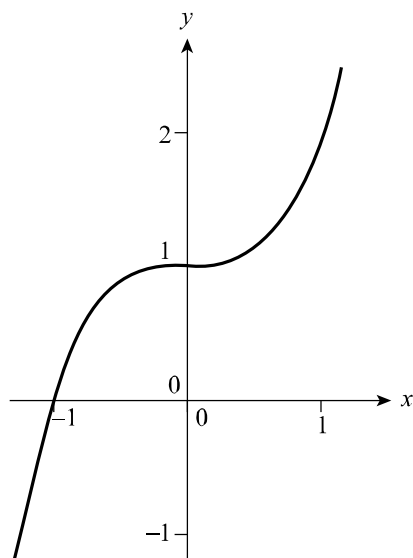


◁ ראו בסעיף הבא: 'הזזה, מתיחה ושיקוף במקביל לצירים'.

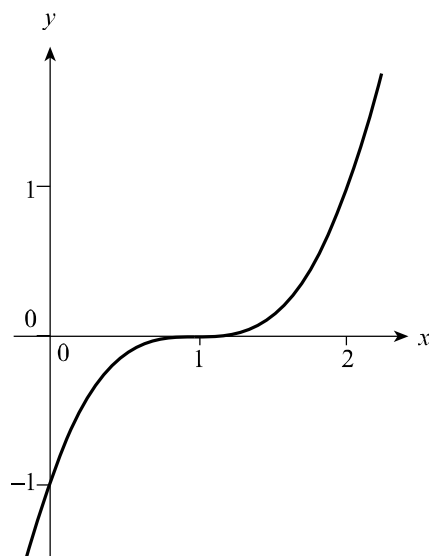
השאלה בעמוד 101

תשובה 37

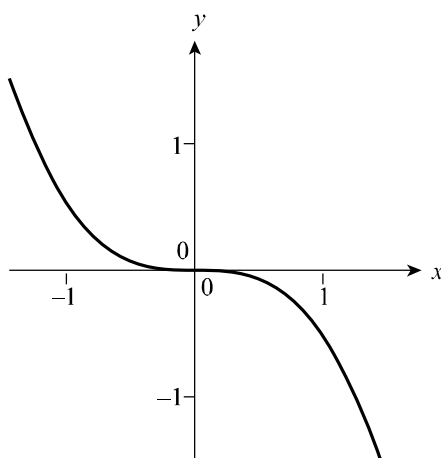
א. גרף הפונקציה $g(x) = x^3 + 1$ מתקבל מהזזת הגרף של $f(x) = x^3$ יחידה אחת כלפי מעלה:



ב. גרף הפונקציה $g(x) = (x-1)^3$ מתקבל מהזזת הגרף של f יחידה אחת ימינה:



ג. גרף הפונקציה $g(x) = -x^3/2$ מתקבל משיקוף גרף הפונקציה f וכיווצו פי 2 במקביל לציר ה- y :



השאלה בעמוד 102

תשובה 38

א. נתונה הפונקציה: $f(x) = |x-5|$.

לכל $x \geq 5$ מתקיים $x-5 \geq 0$ ולכן $f(x) = x-5$.

לכל $x < 5$ מתקיים $x-5 < 0$ ולכן $f(x) = -(x-5) = 5-x$.

מכאן מתקבל ש- f היא הדבקה של שתי פונקציות לינאריות:

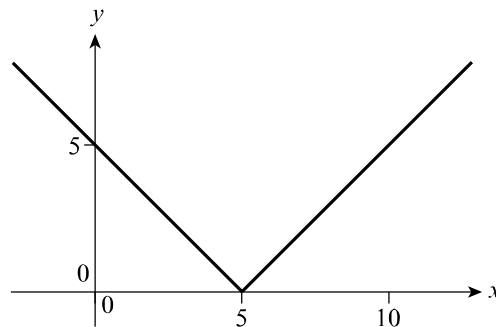
$$f(x) = \begin{cases} x-5 & x \geq 5 \\ 5-x & x < 5 \end{cases}$$

f עולה בקטע $[5, \infty)$ (כפונקציה לינארית בעלת שיפוע חיובי) ויורדת בקטע $(-\infty, 5]$ (כפונקציה לינארית בעלת שיפוע שלילי).

נקודת המפגש של גרף הפונקציה עם ציר ה- y היא $(0, f(0)) = (0, 5)$. כדי למצוא את נקודת המפגש עם ציר ה- x , נפתור את המשוואה $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow |x - 5| = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

נקודת המפגש היחידה של הגרף עם ציר ה- x היא $(5, 0)$.
גרף הפונקציה נראה כך:



ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{5 - x}$.

הפונקציה מוגדרת עבור כל x המקיים $5 - x \geq 0$, כלומר $x \leq 5$.
לכן תחום ההגדרה הוא $(-\infty, 5]$.

נקודת המפגש עם ציר ה- y היא $(0, f(0)) = (0, \sqrt{5}) \approx (0, 2.236)$.
נפתור את המשוואה $f(x) = 0$:

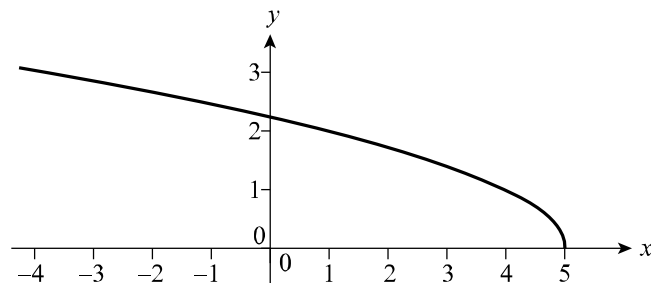
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{5 - x} = 0 \Leftrightarrow 5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

לכן נקודת המפגש היחידה עם ציר ה- x היא $(5, 0)$.

נתבונן בפונקציה $g(x) = \sqrt{-x}$. הגרף של g הוא שיקוף ביחס לציר ה- y של הגרף של פונקציית השורש $h(x) = \sqrt{x}$.

$$\text{נבטא את } f \text{ בעזרת } g: f(x) = \sqrt{-(x - 5)} = g(x - 5) = g(x + (-5))$$

לכן הגרף של f הוא הזזה ימינה ב-5 יחידות של הגרף של g . מכאן גרף הפונקציה f הוא:



מגרף זה ניתן לראות ש- f יורדת בתחום הגדרתה.

ג. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$.

f היא פונקציה ריבועית, לכן הגרף שלה הוא פרבולה.

$f(0) = 3$, לכן נקודת המפגש עם ציר ה- y היא $(0, 3)$.

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} \quad : f(x) = 0 \quad \text{נפתור את המשוואה}$$

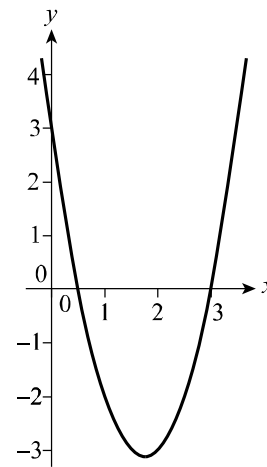
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 3$$

נקודות המפגש עם ציר ה- x הן $(1/2, 0)$ ו- $(3, 0)$.

$$x = \frac{7}{4} \quad \text{שיעורי קודקוד הפרבולה הם:}$$

$$y = 2 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^2 - 7 \cdot \frac{7}{4} + 3 = -\frac{25}{8} = -3\frac{1}{8}$$

גרף הפונקציה נראה כך:



מהגרף ניתן לראות ש- f יורדת ב- $(-\infty, 7/4]$ ועולה ב- $[7/4, \infty)$.

ד. נתונה הפונקציה: $f(x) = |x^2 - x|$.

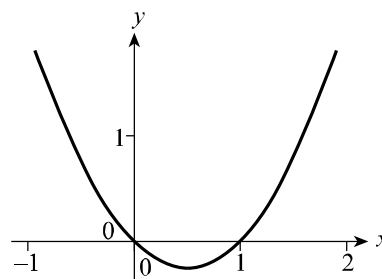
נתבונן תחילה בפונקציה $g(x) = x^2 - x$.

g היא פונקציה ריבועית. בדומה לסעיף הקודם, ניתן לראות כי הגרף של g הוא

פרבולה הנפגשת עם הצירים בנקודות $(0, 0)$ ו- $(1, 0)$, וקודקודה נמצא בנקודה

$$(1/2, -1/4)$$

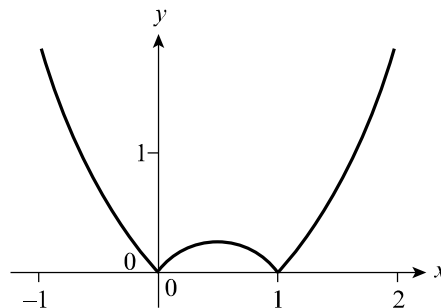
הגרף של g נראה כך:



הפונקציה g מקבלת ערכים שליליים עבור $0 < x < 1$, וערכים אי-שליליים בשאר הישר. לכן:

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} x^2 - x & x \leq 0 \\ x - x^2 & 0 < x < 1 \\ x^2 - x & x \geq 1 \end{cases}$$

כדי לקבל את הגרף של f , עלינו לשקף את חלק הגרף של g שבקטע $0 < x < 1$ ביחס לציר ה- x . הגרף המתקבל הוא:



מגרף זה ניתן לראות ש- f יורדת בקטע $(-\infty, 0]$, עולה בקטע $[0, 1/2]$, יורדת בקטע $[1/2, 1]$ ועולה בקטע $[1, \infty)$.

השאלה בעמוד 102

תשובה 39

א. נתונות הפונקציות:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & 3 \leq x \leq 5 \end{cases}, \quad g(x) = \sqrt{x}$$

תחום ההגדרה של f הוא $[0, 1] \cup [3, 5]$, ותחום ההגדרה של g הוא $[0, \infty)$.

כדי ש- $f(g(x))$ יהיה מוגדר, צריך להתקיים $x \geq 0$ וגם $\sqrt{x} \in [0, 1] \cup [3, 5]$, כלומר:

$$0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \quad \text{או} \quad 3 \leq \sqrt{x} \leq 5$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1 \quad \text{או} \quad 9 \leq x \leq 25$$

תחום ההגדרה של $f \circ g$ הוא אפוא $[0, 1] \cup [9, 25]$.

אם $x \in [0, 1]$ אז $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$, כלומר $0 \leq g(x) \leq 1$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = g(x) = \sqrt{x} \quad \text{לכן:}$$

אם $x \in [9, 25]$ אז $3 \leq \sqrt{x} \leq 5$, כלומר $3 \leq g(x) \leq 5$.

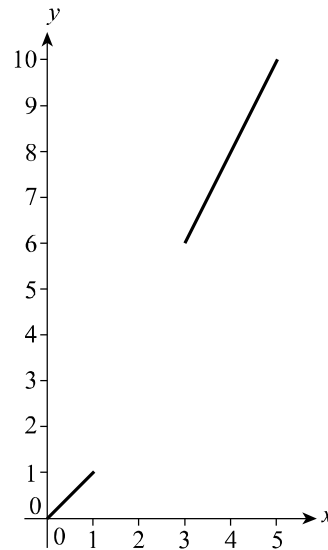
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) = 2\sqrt{x} \quad \text{לכן:}$$

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 2\sqrt{x} & 9 \leq x \leq 25 \end{cases} \quad \text{ביחוד נקבל:}$$

◁ העלאת אי-שוויון אי-שלילי בריבוע מניבה אי-שוויון שקול, ראו שאלה 34 בשיעור 4.

◁ על פי שאלה 34 בשיעור 4, או כמסקנה מכך ש- $h(x) = \sqrt{x}$ היא פונקציה עולה.

ב. כדי למצוא את $\text{Im } f$, נציג את גרף הפונקציה f :



מהגרף ניתן לראות שתמונת הפונקציה (= היטל גרף הפונקציה על ציר ה- y) היא $[0, 1] \cup [6, 10]$.

ג. תחום הפונקציה f^{-1} הוא תמונת f , שהיא $[0, 1] \cup [6, 10]$.
 טווח הפונקציה f^{-1} הוא התחום של f , שהוא $[0, 1] \cup [3, 5]$.
 לכל $0 \leq y \leq 1$ פתרון המשוואה $f(x) = y$ שייך לקטע $[0, 1]$, כי רק עבור $0 \leq x \leq 1$ מתקיים $0 \leq f(x) \leq 1$.
 עבור $0 \leq x \leq 1$ מתקיים $f(x) = x$, לכן מהמשוואה $f(x) = y$ נובע $x = y$ ומכאן $f^{-1}(y) = y$. לכן $f^{-1}(x) = x$ לכל $0 \leq x \leq 1$.
 לכל $6 \leq y \leq 10$ פתרון המשוואה $f(x) = y$ שייך לקטע $[3, 5]$, כי רק עבור $3 \leq x \leq 5$ מתקיים $6 \leq f(x) \leq 10$.
 עבור $3 \leq x \leq 5$ מתקיים $f(x) = 2x$, לכן מהמשוואה $f(x) = y$ נובע $2x = y$ ולכן $x = y/2$. לכן $f^{-1}(x) = x/2$, לפיכך $f^{-1}(x) = x/2$ לכל $6 \leq x \leq 10$.
 לסיכום:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x/2 & 6 \leq x \leq 10 \end{cases}$$

נתונה הפונקציה $f(x) = \lfloor x \rfloor$ (פונקציית החלק השלם). נתבונן בקבוצה $A = \mathbb{Z}$ (קבוצת המספרים השלמים). לכל $x \in A$ מתקיים $f(x) = x$.
 אם $x_1, x_2 \in A$ ו- $x_1 \neq x_2$, אז $f(x_1) = x_1$ ו- $f(x_2) = x_2$, ומכאן $f(x_1) \neq f(x_2)$.
 לכן $f|_A$ חח"ע.

השאלה בעמוד 102

נזכור ש- $\text{Im } f$ הוא תחום

ההגדרה של f^{-1} .

תשובה 41

נניח ש- f עולה, אז f חח"ע ולכן f^{-1} מוגדרת היטב.

נניח ש- $y_1, y_2 \in \text{Im } f$ וש- $y_1 < y_2$. נוכיח ש- $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$:

נסמן $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$

לפי הגדרת הפונקציה ההפוכה, מתקיים: $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$

אם $x_1 = x_2$ אז $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, בסתירה להנחה ש- $y_1 < y_2$.

אם $x_1 > x_2$ אז $y_1 = f(x_1) > f(x_2) = y_2$ (כי f עולה), כלומר $y_1 > y_2$, שוב בסתירה להנחה.

לכן $x_1 < x_2$, כלומר $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. לכן f עולה.

ההוכחה שאם f יורדת אז f^{-1} יורדת דומה: כמקודם, מניחים ש- $y_1 < y_2$ ומסיקים

ש- $x_1 > x_2$ על ידי שלילת האפשרויות $x_1 = x_2$ ו- $x_1 < x_2$. מכאן נובע

ש- $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$.

תשובה 42

נתונה הפונקציה $f(x) = \prod_{i=1}^{100} (x - i)$.

נבדוק מתי מתקיים $f(x) = 0$.

מכפלה שווה לאפס אם ורק אם אחד הגורמים שבה שווה לאפס.

לכן $f(x) = 0$ אם ורק אם מתקיים אחד השוויונות הבאים:

$x - 1 = 0$ או $x - 2 = 0$ או $x - 3 = 0$ או ... או $x - 100 = 0$.

דבר זה שקול לכך ש- x הוא אחד המספרים $1, 2, 3, \dots, 100$.

לכן נקודות המפגש של גרף הפונקציה f עם ציר ה- x הן

$(1, 0), (2, 0), (3, 0), \dots, (100, 0)$

כעת נציב: $f(0) = \prod_{i=1}^{100} (0 - i) = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot \dots \cdot (-100)$

במכפלה זו יש מספר זוגי (100) של מספרים שליליים, לכן המכפלה חיובית.

ערכה המוחלט של המכפלה הוא $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100 = 100!$

לכן $f(0) = 100!$ ומכאן שנקודת המפגש של גרף הפונקציה עם ציר ה- y היא $(0, 100!)$.

השאלה בעמוד 102

תשובה 43

נניח ש- f ו- g הן פונקציות לינאריות, כלומר

$$f(x) = ax + b, \quad g(x) = cx + d$$

עבור $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ מספרים קבועים. אז לכל x ממשי,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = ax + b + cx + d$$

$$= (a + c)x + (b + d)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = ag(x) + b = a(cx + d) + b$$

$$= (ac)x + (ad + b)$$

המספרים $a + c, b + d, ac, ad + b$ המופיעים בביטויים לעיל הם קבועים (אינם תלויים ב- x), לכן $f + g$ ו- $f \circ g$ הן פונקציות לינאריות. השיפוע של $f + g$ הוא **סכום השיפועים** של f ושל g . השיפוע של $f \circ g$ הוא **מכפלת השיפועים** של f ושל g .

פתרונות לשאלות בשיעור 7

השאלה בעמוד 104

תשובה 1

$$16^{1/2} = \sqrt{16} = 4 \quad \text{א.}$$

$$32^{2/5} = (\sqrt[5]{32})^2 = 2^2 = 4 \quad \text{ב.}$$

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

$$9^{-1\frac{1}{2}} = 9^{-3/2} = (\sqrt{9})^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \quad \text{ד.}$$

$$8^{2\frac{1}{2}} = 8^{5/2} = (\sqrt{8})^5 = (2\sqrt{2})^5 = 2^5 \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot \sqrt{2} = 2^5 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{2} = 128\sqrt{2} \quad \text{ה.}$$

השאלה בעמוד 110

תשובה 2

נתון כי הסכום ההתחלתי הוא 1000 שקלים, והחיסכון הוא בריבית שנתית קבועה של 5%.
לכן סכום החיסכון לאחר n שנים הוא $M(n) = 1000 \cdot (1.05)^n$. סכום החיסכון גדל ביחס
שווה בפרקי זמן שווים, לכן הוא פונקציה מעריכית של הזמן. לכן מתקיים לכל $t \geq 0$ ממשי:
 $M(t) = 1000 \cdot (1.05)^t$

$$\text{א. נציב } t = 1/2: M\left(\frac{1}{2}\right) = 1000 \cdot (1.05)^{1/2} = 1000 \cdot \sqrt{1.05} \approx 1024.70$$

לכן לאחר שישה חודשים, שהם חצי שנה, סכום החיסכון יהיה 1024 שקלים ו-70
אגורות.

$$\text{ב. נציב } t = 1\frac{1}{4}: M\left(1\frac{1}{4}\right) = 1000 \cdot (1.05)^{1\frac{1}{4}} = 1000 \cdot (1.05)^{5/4} \approx 1062.89$$

לכן לאחר שנה ושלושה חודשים, שהם $1\frac{1}{4}$ שנים, סכום החיסכון יהיה 1062 שקלים
ו-89 אגורות.

השאלה בעמוד 110

תשובה 3

נסמן ב- q את היחס שבו מוכפל סכום החיסכון בשנה אחת.

ב-9 שנים מוכפל סכום החיסכון פי q^9 , לכן

$$1500 = 1000 \cdot q^9 \\ \Rightarrow q^9 = \frac{1500}{1000} = 1.5 \Rightarrow q = \sqrt[9]{1.5}$$

$$\text{נסמן ב-} s \text{ את היחס שבו מוכפל סכום החיסכון בחצי שנה. אז } s^2 = q \text{ ולכן} \\ s = \sqrt{q} = \sqrt{\sqrt[9]{1.5}}$$

לאחר 6 חודשים נוספים סכום החיסכון יהיה:

$$1500 \cdot s = 1500 \cdot \sqrt{\sqrt[9]{1.5}} \approx 1534.17$$

כלומר 1534 שקלים ו-17 אגורות.

השאלה בעמוד 110

תשובה 4

נסמן ב- q את היחס שבו גדלה האוכלוסיה בשנה אחת. מהנתון נובע:

$$1,020,000 = 1,000,000 \cdot q^3 \Rightarrow q^3 = 1.02 \Rightarrow q = \sqrt[3]{1.02}$$

לכן גודל האוכלוסיה לאחר t שנים נתון על ידי הפונקציה

$$f(t) = 1,000,000 \cdot (\sqrt[3]{1.02})^t$$

גודל האוכלוסיה 10 שנים לאחר המפגש השני הוא גודל האוכלוסיה בזמן

$$t = 3 + 10 = 13$$

$$f(13) = 1,000,000 \cdot (\sqrt[3]{1.02})^{13} \approx 1,089,601$$

השאלה בעמוד 112

תשובה 5

$$\frac{2^{2x+1}}{8^x} \stackrel{(1)}{=} \frac{2^{2x} \cdot 2^1}{8^x} \stackrel{(2)}{=} 2 \cdot \frac{(2^2)^x}{8^x} = 2 \cdot \frac{4^x}{8^x} \quad \text{א.}$$

$$\stackrel{(3)}{=} 2 \cdot \left(\frac{4}{8}\right)^x = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \stackrel{(4)}{=} 2 \cdot \frac{1^x}{2^x} \stackrel{(5)}{=} \frac{2}{2^x}$$

(1) לפי חוק חיבור המעריכים; (2) לפי חוק החזקה של חזקה; (3), (4) לפי חוק פילוג החזקה מעל החילוק; (5) לפי חוק החזקה של 1.

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{2})^{4x-1}}{2^x} &\stackrel{(1)}{=} \frac{(\sqrt{2})^{4x}}{2^x} \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^1} \stackrel{(2)}{=} \frac{(\sqrt{2^4})^x}{\sqrt{2} \cdot 2^x} \quad \text{ב.} \\ &= \frac{4^x}{\sqrt{2} \cdot 2^x} \stackrel{(3)}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{4}{2}\right)^x = \frac{2^x}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(1) לפי חוק חיסור המעריכים; (2) לפי חוק החזקה של חזקה; (3) לפי חוק פילוג החזקה מעל החילוק.

$$(x^2 y^3)^{1/3} \stackrel{(1)}{=} (x^2)^{1/3} (y^3)^{1/3} \stackrel{(2)}{=} x^{2/3} y^1 = x^{2/3} y \quad \text{ג.}$$

(1) לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל; (2) לפי חוק החזקה של חזקה.

$$\frac{10^x 2^{-x}}{(\sqrt{5})^{2x}} \stackrel{(1)}{=} \frac{10^x \cdot \frac{1}{2^x}}{(\sqrt{5^2})^x} = \frac{10^x}{2^x \cdot 5^x} \stackrel{(2)}{=} \frac{10^x}{10^x} = 1 \quad \text{ד.}$$

(1) לפי חוק החזקה במעריך הנגדי וחוק החזקה של חזקה; (2) לפי חוק פילוג החזקה מעל הכפל.

השאלה בעמוד 114

תשובה 9

$$א. \frac{\sqrt[5]{a^2b}}{(\sqrt[7]{a})^3} = \frac{\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt[5]{b}}{a^{3/7}} = \frac{a^{2/5}}{a^{3/7}} \cdot \sqrt[5]{b} = a^{\frac{2}{5}-\frac{3}{7}} \cdot \sqrt[5]{b} = a^{-\frac{1}{35}} \cdot \sqrt[5]{b} = \frac{\sqrt[5]{b}}{\sqrt[35]{a}}$$

$$ב. \frac{(ab^2)^{3/4}}{\sqrt[4]{a^3b^4}} = \frac{a^{3/4}b^{6/4}}{a^{3/4}b} = b^{\frac{3}{2}-1} = b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$$

$$ג. \begin{aligned} a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} &= a\sqrt{a\sqrt{a\cdot a^{1/2}}} = a\sqrt{a\sqrt{a^{3/2}}} = a\sqrt{a\cdot (a^{3/2})^{1/2}} \\ &= a\sqrt{a\cdot a^{3/4}} = a\sqrt{a^{7/4}} = a(a^{7/4})^{1/2} = a^1 \cdot a^{7/8} \\ &= a^{15/8} \end{aligned}$$

$$ד. \text{ לפי הזהות בשאלה 6, } \sqrt[n]{a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n} = \sqrt[n]{a^{1+2+\dots+n}},$$

לפי נוסחת הסכום של סדרה חשבונית,

$$\sqrt[n]{a \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n} = \sqrt[n]{a^{n(n+1)/2}} = a^{\frac{n(n+1)}{2n}} = a^{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{a^{n+1}}$$

השאלה בעמוד 117

תשובה 10

א. נתונה המשוואה $3^x = 3\sqrt{3}$. נובעת ממנה המשוואה השקולה:

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^1 \cdot 3^{1/2} = 3^{1.5}$$

$$\Leftrightarrow x = 1.5 \quad \text{לפי חד־חד־ערכיות הפונקציה } f(x) = 3^x:$$

לכן פתרון המשוואה היחיד הוא $x = 1.5$.

$$ב. \text{ נתונה המשוואה: } 10^x = 0.00001$$

$$\Leftrightarrow 10^x = 10^{-5} \quad \text{הביטוי באגף הימני שווה ל־} 10^{-5} \text{ לפיכך:}$$

$$\Leftrightarrow x = -5$$

פתרון המשוואה היחיד הוא $x = -5$.

$$ג. \text{ נתונה המשוואה: } 6 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 9$$

נפשט את האגף השמאלי, לפי חוקי החזקות:

$$6 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{x+2} = 6 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x \cdot 2^2 = 6 \cdot 2^x + 12 \cdot 2^x = 18 \cdot 2^x$$

$$\Leftrightarrow 18 \cdot 2^x = 9 \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה}$$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{1}{2} = 2^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

פתרון המשוואה היחיד הוא $x = -1$.

$$ד. \text{ נתונה המשוואה: } (2^x)^x \cdot 4^x = 8$$

$$(2^x)^x = 2^{x \cdot x} = 2^{x^2} \quad \text{לפי חוקי החזקות:}$$

$$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2} \cdot 2^{2x} = 8 \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2+2x} = 2^3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x = 3 \quad \text{מכיוון ש-} f(x) = 2^x \text{ חד-חד-ערכית:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ או } x = -3$$

פתרונות המשוואה הם $x = 1$ ו- $x = -3$.

$$2^x + 2(\sqrt{2})^x = 8 \quad \text{ה. נתונה המשוואה:}$$

נגדיר $t = (\sqrt{2})^x$. מהגדרה זו נובע:

$$2^x = (\sqrt{2}^2)^x = \sqrt{2}^{2x} = (\sqrt{2}^x)^2 = t^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 2t = 8 \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = -1 \pm 3$$

$$\Leftrightarrow t = -4 \text{ או } t = 2$$

מהגדרת t נובע ש- $t > 0$, לכן לא יכול להתקיים $t = -4$. נותרת האפשרות:

$$\Leftrightarrow t = 2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{2})^x = 2 = (\sqrt{2})^2 \quad \text{נחזור למשתנה המקורי:}$$

$$\Leftrightarrow x = 2$$

פתרון המשוואה היחיד הוא, לפיכך, $x = 2$.

$$3^{x+1} + \frac{4}{3^x - 1} = -5 \quad \text{ו. נתונה המשוואה:}$$

$$3^{x+1} = 3^x \cdot 3^1 = 3t \quad \text{נגדיר } t = 3^x \text{ מהגדרה זו נובע:}$$

$$\Leftrightarrow 3t + \frac{4}{t-1} = -5 \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה}$$

כדי שאגפי המשוואה המקורית יהיו מוגדרים, חייב להתקיים $3^x \neq 1$, כלומר $t \neq 1$. נניח מעתה שתנאי זה מתקיים, ונכפול את שני האגפים ב- $t-1$.

$$\Leftrightarrow 3t(t-1) + 4 = -5(t-1)$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 - 3t + 4 = -5t + 5$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6}$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ או } t = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \quad \text{היות ש-} t > 0$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \quad \text{נחזור למשתנה המקורי:}$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

פתרון המשוואה היחיד הוא, לפיכך, $x = -1$.

ז. נתונה המשוואה:

$$125 \cdot 2^x = 8 \cdot 5^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{5^x} = \frac{8}{125}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

הפונקציה $f(x) = (2/5)^x$ חח"ע, ולכן:
פתרון המשוואה היחיד הוא $x = 3$.

ח. נתונה המשוואה:

$$9 \cdot 4^x + 5 \cdot 6^x = 4 \cdot 9^x$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot \frac{4^x}{9^x} + 5 \cdot \frac{6^x}{9^x} = 4$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 5 \cdot \left(\frac{6}{9}\right)^x = 4$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = 4$$

נצמצם את השבר $6/9$:נגדיר $t = (2/3)^x$. מהגדרה זו נובע:

$$t^2 = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + 5t = 4$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 + 5t - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{18} = \frac{-5 \pm 13}{18}$$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ או } t = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4}{9}$$

היות ש- $t > 0$:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

נחזור למשתנה המקורי:

$$\Leftrightarrow x = 2$$

לכן $x = 2$ הוא הפתרון היחיד.

השאלה בעמוד 118

תשובה 11

א. נתון האי־שוויון:

$$(0.1)^x < 1000$$

נציג את האגף הימני כחזקה של 0.1:

$$1000 = 10^3 = \left(\frac{1}{0.1}\right)^3 = \frac{1}{0.1^3} = 0.1^{-3}$$

$$\Leftrightarrow (0.1)^x < 0.1^{-3}$$

מתקבל האי־שוויון השקול

$$\Leftrightarrow x > -3$$

מכיוון ש- $f(x) = (0.1)^x$ פונקציה יורדת:קבוצת הפתרונות היא $(-3, \infty)$.

ב. נתון האי־שוויון:

$$2^x + 5^x \leq 5^{x+1} - 2^{x+3} - 2^{x+4}$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^{x+3} + 2^{x+4} \leq 5^{x+1} - 5^x$$

נעביר אגפים:

$$\Leftrightarrow 2^x + 2^3 \cdot 2^x + 2^4 \cdot 2^x \leq 5^1 \cdot 5^x - 5^x$$

$$\Leftrightarrow 2^x + 8 \cdot 2^x + 16 \cdot 2^x \leq 5 \cdot 5^x - 5^x$$

$$\Leftrightarrow 25 \cdot 2^x \leq 4 \cdot 5^x$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^x}{5^x} \leq \frac{4}{25}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x \leq \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2$$

מכיוון ש- $f(x) = (2/5)^x$ פונקציה יורדת:

קבוצת הפתרונות היא $[2, \infty)$.

ג. נתון האי־שוויון: $2^{x^2+1} > \left(\frac{1}{8}\right)^x$

מהשוויון $2^{-3} = 1/2^3 = 1/8$ נובע: $\left(\frac{1}{8}\right)^x = (2^{-3})^x = 2^{-3x}$

מתקבל אי־שוויון שקול: $2^{x^2+1} > 2^{-3x}$

ומכיוון ש- $f(x) = 2^x$ פונקציה עולה: $x^2 + 1 > -3x$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 3x > 0$$

נמצא את פתרונות המשוואה הריבועית המתאימה, $x^2 + 3x + 1 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

הפתרונות הם $x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \approx -2.618$, $x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \approx -0.382$

לפיכך האי־שוויון שקול לתנאים הבאים: $x < x_1$ או $x > x_2$

קבוצת הפתרונות היא $(-\infty, x_1) \cup (x_2, \infty)$.

ד. נתון האי־שוויון: $\frac{9 - 13 \cdot 3^x}{3 \cdot 9^x - 10 \cdot 3^x + 3} < 1$

נגדיר $t = 3^x$. מההגדרה נובע: $t = 9^x$. מתקבל האי־שוויון השקול

$$\Leftrightarrow \frac{9 - 13t}{3t^2 - 10t + 3} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{9 - 13t}{3t^2 - 10t + 3} - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9 - 13t - (3t^2 - 10t + 3)}{3t^2 - 10t + 3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-3t^2 - 3t + 6}{3t^2 - 10t + 3} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2 + t - 2}{3t^2 - 10t + 3} > 0$$

נחלק את שני האגפים ב-3:

נפרק לגורמים את המונה ואת המכנה:

פתרונות המשוואה הריבועית $t^2 + t - 2 = 0$ הם (לפי נוסחת השורשים) $t_1 = -2$

ו- $t_2 = 1$, ולכן:

$$t^2 + t - 2 = (t - t_1)(t - t_2) = (t + 2)(t - 1)$$

לפי הזהות

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

(ראו שיעור 3)



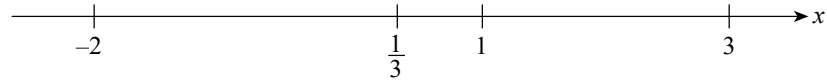
פתרונות המשוואה הריבועית $3t^2 - 10t + 3 = 0$ הם $t_1 = 1/3$ ו- $t_2 = 3$, ולכן

$$3t^2 - 10t + 3 = 3(t - t_1)(t - t_2) = 3(t - 1/3)(t - 3)$$

מתקבל האי-שוויון השקול

$$\Leftrightarrow \frac{(t+2)(t-1)}{3(t-1/3)(t-3)} > 0$$

נסמן את נקודות ההתאפסות של המונה והמכנה על הישר:



מניתוח סימן הביטוי שבאגף השמאלי עבור כל אחת מהאפשרויות: $t < -2$,

$-2 < t < 1/3$, $1/3 < t < 1$, $1 < t < 3$, $t > 3$ נקבל שהאי-שוויון שקול ל:

$$\Leftrightarrow t < -2 \text{ או } 1/3 < t < 1 \text{ או } t > 3$$

האפשרות $t < -2$ לא תיתכן, כי $t = 3^x > 0$. לכן

$$\Leftrightarrow 1/3 < t < 1 \text{ או } t > 3$$

$$\Leftrightarrow 3^{-1} < 3^x < 3^0 \text{ או } 3^x > 3^1$$

נחזור למשתנה המקורי:

$$\Leftrightarrow -1 < x < 0 \text{ או } x > 1$$

לפי מונוטוניות הפונקציה $f(x) = 3^x$:

קבוצת הפתרונות היא $(-1, 0) \cup (1, \infty)$.

השאלה בעמוד 120

תשובה 12

א. $2^3 = 8$ ולכן $\log_2 8 = 3$.

ב. $10^{-1} = 0.1$ ולכן $\log_{10} 0.1 = -1$.

ג. $3^4 = 81$ ולכן $\log_3 81 = 4$.

ד. $3\sqrt{3} = 3 \cdot 3^{1/2} = 3^{1.5}$ ולכן $\log_3 3\sqrt{3} = 1.5$.

ה. $2^{10} = 1024$ ולכן $\log_2 1024 = 10$.

ו. $5 = \sqrt{25} = 25^{1/2}$ ולכן $\log_{25} 5 = 1/2$.

ז. $4 = 2^2 = (0.5^{-1})^2 = 0.5^{-2}$ ולכן $\log_{0.5} 4 = -2$.

ח. $9 = 3^2 = (3^2)^{1/5} = 3^{2/5}$ ולכן $\log_3 \sqrt[5]{9} = 2/5$.

השאלה בעמוד 120

תשובה 13

נתונה תוכנית חיסכון בעלת יתרה התחלתית של 1000 שקלים וריבית של 2% בכל שנה

סכום החיסכון מוכפל פי 1.02, ולכן כעבור t שנים סכום החיסכון הוא $f(t) = 1000 \cdot 1.02^t$ שקלים.

א. נמצא עבור איזה t מתקיים $f(t) = 1100$:

$$1000 \cdot 1.02^t = 1100 \Leftrightarrow 1.02^t = 1.1 \Leftrightarrow t = \log_{1.02} 1.1 \approx 4.81$$

סכום החיסכון יהיה 1100 שקלים כעבור כ-4.81 שנים.

ב. נמצא עבור איזה t מתקיים $f(t) = 2000$:

$$1000 \cdot 1.02^t = 2000 \Leftrightarrow 1.02^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{1.02} 2 \approx 35$$

סכום החיסכון יהיה 2000 שקלים כעבור כ-35 שנים.

השאלה בעמוד 120

תשובה 14

א. $x = \log_2 3 \approx 1.585$. לכן פתרון המשוואה היחיד הוא $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3$.

ב. $x = \log_{10} 5 \approx 0.699$. לכן פתרון המשוואה היחיד הוא $10^x = 5 \Leftrightarrow x = \log_{10} 5$.

ג. נתונה המשוואה: $2^x + 4^x = 7$

נגדיר $t = 2^x$. נקבל: $t + t^2 = 7$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

מכיוון ש- $t = 2^x > 0$, אפשרי רק הערך החיובי: $t = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$

$$\Leftrightarrow 2^x = \frac{-1 + \sqrt{29}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \log_2 \left(\frac{-1 + \sqrt{29}}{2} \right) = \log_2 (\sqrt{29} - 1) - 1$$

הפתרון היחיד הוא אפוא $x = \log_2 (\sqrt{29} - 1) - 1 \approx 1.133$.

ד. נתונה המשוואה $10^x + 10^{-x} = 3$

נגדיר: $t = 10^x$. מתקבלת המשוואה

$$t + \frac{1}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 + 1 = 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

פתרונות המשוואה הריבועית הם

$$t_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \approx 0.382, \quad t_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

נחזור למשתנה המקורי: $10^x = t_2$ או $10^x = t_1$

$$\Leftrightarrow x = \log_{10} t_2 \text{ או } x = \log_{10} t_1$$

הפתרונות הם אפוא: $x_1 = \log_{10} t_1 = \log_{10} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right) \approx -0.418$

$$x_2 = \log_{10} t_2 = \log_{10} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \approx 0.418$$

השאלה בעמוד 121

תשובה 15

א. לפי נוסחת הלוגריתם של חזקה,

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a (b^{1/n}) = \frac{1}{n} \cdot \log_a b = \frac{\log b}{n}$$

ב. לפי נוסחת הלוגריתם של מנה,

$$\log_a \frac{1}{b} = \log_a 1 - \log_a b = 0 - \log_a b = -\log_a b$$

ג. לפי נוסחת שינוי הבסיס,

$$\log_b a = \frac{\log_a a}{\log_a b} = \frac{1}{\log_a b}$$

השאלה בעמוד 122

תשובה 16

$$\log_2 7 - \log_2 56 = \log_2 \frac{7}{56} = \log_2 \frac{1}{8} = -3 \quad \text{א.}$$

$$\begin{aligned} \log_{\sqrt{2}} (0.5^{0.5} \cdot 16) &= \frac{\log_2 (0.5^{0.5} \cdot 16)}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 (0.5^{0.5}) + \log_2 16}{\log_2 (2^{0.5})} \\ &= \frac{0.5 \log_2 0.5 + 4}{0.5} = 2(0.5 \cdot (-1) + 4) = 7 \quad \text{ב.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 5 - \log_4 100 &= \log_2 5 - \frac{\log_2 100}{\log_2 4} = \log_2 5 - \frac{\log_2 100}{2} \\ &= \log_2 5 - \log_2 \sqrt{100} = \log_2 5 - \log_2 10 \\ &= \log_2 \frac{5}{10} = \log_2 \frac{1}{2} = -1 \quad \text{ג.} \end{aligned}$$

הערה: בפתרון תרגיל זה דאגנו להעביר את כל הלוגריתמים לאותו הבסיס, בעזרת נוסחת שינוי הבסיס. טקטיקה נפוצה זו מאפשרת שימוש בחוקי לוגריתמים נוספים, המסייעים להגיע אל הפתרון.

$$\log_{\sqrt{2}} 3 - \log_2 12 - \log_4 18 \quad \text{ד. נתון הביטוי:}$$

נפשט כל מחובר בנפרד, ונעביר את כל הלוגריתמים לבסיס 2:

$$\log_{\sqrt{2}} 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{2}} = \frac{\log_2 3}{0.5} = 2 \log_2 3$$

$$\log_2 12 = \log_2 (3 \cdot 4) = \log_2 3 + \log_2 4 = \log_2 3 + 2$$

$$\begin{aligned} \log_4 18 &= \frac{\log_2 18}{\log_2 4} = \frac{\log_2 (2 \cdot 9)}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2 + \log_2 9}{2} = \frac{1 + \log_2 3^2}{2} \\ &= \frac{1 + 2 \log_2 3}{2} = \frac{1}{2} + \log_2 3 \end{aligned}$$

$$\log_{\sqrt{2}} 3 - \log_2 12 - \log_4 18 \quad \text{ביחוד, נקבל:}$$

$$= 2 \log_2 3 - (2 + \log_2 3) - \left(\frac{1}{2} + \log_2 3 \right) = -2.5$$

$$\log_2 (4xy^2) = \log_2 4 + \log_2 x + \log_2 y^2 \quad \text{ה.}$$

$$= 2 + \log_2 x + 2 \log_2 y$$

$$\log_5 \frac{x^{100}}{\sqrt{5y}} = \log_5 x^{100} - \log_5 \sqrt{5y} = 100 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 5y \quad \text{ו.}$$

$$= 100 \log_5 x - \frac{1}{2} (\log_5 5 + \log_5 y)$$

$$= 100 \log_5 x - \frac{1}{2} (1 + \log_5 y)$$

$$= 100 \log_5 x - \frac{1}{2} \log_5 y - \frac{1}{2}$$

ז. נסתמך על הזהות שבשאלה 15ג:

$$\log_x y^2 \cdot \log_y x^2 = 2 \log_x y \cdot 2 \log_y x = 4 \cdot (\log_x y \cdot \log_y x) = 4$$

$$\log_a (b^a \cdot a^b \cdot \sqrt{ab}) = \log_a b^a + \log_a a^b + \log_a \sqrt{ab} \quad \text{ח.}$$

$$\begin{aligned} &= a \log_a b + b \log_a a + \frac{1}{2} \log_a ab \\ &= a \log_a b + b + \frac{1}{2} (\log_a a + \log_a b) \\ &= a \log_a b + \frac{1}{2} \log_a b + b + \frac{1}{2} \\ &= \left(a + \frac{1}{2}\right) \log_a b + b + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

השאלה בעמוד 124

תשובה 17

א. לפי הגדרת הלוגריתם הטבעי:

$$\ln e^5 = \log_e (e^5) = 5$$

$$\ln 5 \approx 1.609 \quad \text{ב.}$$

ג. לכל $a > 0$ מתקיים, לפי נוסחת שינוי הבסיס:

$$\log_a = \log_{10} a = \frac{\log_e a}{\log_e 10} = \frac{\ln a}{\ln 10}$$

$$\frac{\ln a}{\log a} = \ln 10 \approx 2.302 \quad \text{לכן:}$$

$$e^{b \ln a} = e^{(\ln a) \cdot b} = (e^{\ln a})^b = a^b \quad \text{ד. לכל } a > 0 \text{ ולכל } b \text{ ממשי:}$$

השאלה בעמוד 127

תשובה 18

א. נפתור את המשוואה $\log_3 x = 2$: לפי הגדרת הלוגריתם, היא שקולה לכך ש- $x = 3^2$.
לכן הפתרון היחיד הוא $x = 9$.

ב. נתונה המשוואה:

$$\log_2 x + \log_4 x = 5 \quad \text{לפי נוסחת שינוי הבסיס:}$$

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{\log_2 x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} \log_2 x = 5 \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה:}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} \log_2 x = 5$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \frac{10}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{10/3}$$

$$\text{לכן } x = 2^{10/3} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^{10} \approx 10.079 \text{ הוא הפתרון היחיד של המשוואה.}$$

ג. נתונה המשוואה:

$$5^{\log_2 x} = 9$$

נפעיל את הפונקציה $f(x) = \log_2 x$ על שני האגפים (מתקבלת משוואה שקולה כי f

$$\Leftrightarrow \log_2 (5^{\log_2 x}) = \log_2 9 \quad \text{היא פונקציה חח"ע):}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x \cdot \log_2 5 = \log_2 9 \quad \text{לפי חוקי הלוגריתמים:}$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x = \frac{\log_2 9}{\log_2 5} = \log_5 9$$

$$\Leftrightarrow x = 2^{\log_5 9} \quad \text{לפי הגדרת הלוגריתם:}$$

$$\text{לכן הפתרון היחיד הוא } x = 2^{\log_5 9} \approx 2.576.$$

$$\ln \ln x = 2 \quad \text{ד. נתונה המשוואה:}$$

$$\text{לפי הגדרת הלוגריתם הטבעי קיימת שקילות: } \ln a = b \Leftrightarrow a = e^b.$$

$$\ln x = e^2 \quad \text{לכן המשוואה שקולה ל:}$$

$$x = e^{e^2} \quad \text{נפעיל את אותו שיקול שוב על המשוואה שהתקבלה:}$$

$$\text{לכן פתרון המשוואה היחיד הוא } x = e^{e^2} \approx 1618.178$$

הערה: דרך פתרון נוספת היא להפעיל את הפונקציה $f(x) = e^x$ על שני האגפים

(מתקבלת משוואה שקולה כי f היא פונקציה ח"ע): מהמשוואה $\ln \ln x = 2$ נקבל

$$e^{\ln \ln x} = e^2, \text{ כלומר } \ln x = e^2. \text{ נפעיל את } f \text{ פעם נוספת על שני האגפים שהתקבלו,}$$

$$\text{ונקבל שוויון שקול } e^{\ln x} = e^{e^2}, \text{ כלומר } x = e^{e^2}.$$

$$\log_x (x+1) = 2 \quad \text{ה. נתונה המשוואה:}$$

כדי שהאגף השמאלי של המשוואה יהיה מוגדר, צריך להתקיים: $x > 0$ ו- $x \neq 1$.

$$\Leftrightarrow x+1 = x^2 \quad \text{תחת הנחה זו, המשוואה שקולה ל:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618 \text{ או } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0.618$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{כאמור, אנו מניחים ש-} x > 0. \text{ לכן הפתרון השלילי נפסל:}$$

מצאנו כי המספר $x = (1 + \sqrt{5})/2 \approx 1.618$ (הנקרא **חתך הזהב** - ראו תשובה 21ג

בשיעור 3) הוא הפתרון היחיד של המשוואה.

$$e^{2 \ln x} + e^{\ln x} = 2 \quad \text{ו. נתונה המשוואה:}$$

כדי שהאגף השמאלי של המשוואה יהיה מוגדר, צריך להתקיים: $x > 0$. נניח שתנאי זה

מתקיים. לפי הגדרת הלוגריתם הטבעי, $e^{\ln x} = x$. מכאן נובע:

$$e^{2 \ln x} = (e^{\ln x})^2 = x^2$$

$$x^2 + x = 2 \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה:}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ או } x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{כאמור, אנו מניחים ש-} x > 0. \text{ לכן הפתרון השלילי נפסל:}$$

$$\text{מצאנו כי הפתרון היחיד של המשוואה הוא } x = 1.$$

$$\log x - \frac{\log(x+1)}{2} = 1.5 \quad \text{ז. נתונה המשוואה:}$$

כדי שהאגף השמאלי של המשוואה יהיה מוגדר, צריך להתקיים: $x > 0$. נניח שתנאי זה

$$\Leftrightarrow 2\log x - \log(x+1) = 3 \quad \text{מתקיים. נכפול ב-2:}$$

$$\Leftrightarrow 2\log x = 3 + \log(x+1) \quad \text{נעביר אגפים:}$$

נפעיל את הפונקציה החזקה $f(x) = 10^x$ על שני האגפים:

$$\Leftrightarrow 10^{2\log x} = 10^{3+\log(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow (10^{\log x})^2 = 10^3 \cdot 10^{\log(x+1)} \quad \text{נפשט לפי חוקי החזקות:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1000(x+1) \quad \text{לפי הגדרת הלוגריתם:}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1000x - 1000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1000 \pm \sqrt{1,004,000}}{2}$$

מבין שני הפתרונות, הפתרון שבו נבחר סימן המינוס הוא שלילי, כי:

$$\sqrt{1,004,000} > \sqrt{1,000,000} = 1000 \Rightarrow 1000 - \sqrt{1,004,000} < 0$$

פתרון זה נפסל לאור ההנחה ש- $x > 0$. לכן:

$$\Leftrightarrow x = \frac{1000 + \sqrt{1,004,000}}{2} \approx 1000.999$$

זוהי הפתרון היחיד של המשוואה.

$$\log x \cdot \log(-x) = 1 \quad \text{ח. נתונה המשוואה:}$$

כדי שהביטוי $\log x$ יהיה מוגדר, צריך להתקיים $x > 0$.

כדי שהביטוי $\log(-x)$ יהיה מוגדר, צריך להתקיים $-x > 0$, כלומר $x < 0$.

לכן הביטוי באגף השמאלי של המשוואה אינו מוגדר עבור אף ערך של x , ומכאן שלמשוואה זו אין פתרון.

השאלה בעמוד 128

תשובה 19

$$\log x \geq -2 \quad \text{א. נתון האי-שוויון:}$$

נפעיל את הפונקציה $f(x) = 10^x$ על שני האגפים. פונקציה זו עולה, ולכן מתקבל

$$\Leftrightarrow 10^{\log x} \geq 10^{-2} \quad \text{אי-שוויון שקול:}$$

$$\Leftrightarrow x \geq 10^{-2} = 0.01 \quad \text{לפי הגדרת הלוגריתם:}$$

קבוצת הפתרונות היא $[0.01, \infty)$.

$$\log(x+1) - \log x > 3 \quad \text{ב. נתון האי-שוויון:}$$

כדי שהאגף השמאלי יהיה מוגדר צריך להתקיים התנאי $x > 0$. נניח מעתה שתנאי זה מתקיים.

$$\Leftrightarrow \log(x+1) > 3 + \log x \quad \text{נעביר אגפים:}$$

נפעיל את הפונקציה העולה $f(x) = 10^x$ על שני האגפים:

$$\Leftrightarrow 10^{\log(x+1)} > 10^3 \cdot 10^{\log x}$$

$$\Leftrightarrow x+1 > 1000x$$

$$\Leftrightarrow 999x < 1$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{1}{999}$$

כאמור, הנחנו ש- $x > 0$. קבוצת הפתרונות היא אפוא $(0, 1/999)$.

$$\sqrt{\log_2 x} \geq \log_4 \left(\frac{x}{4} \right) \quad \text{ג. נתון האי־שוויון:}$$

נברר תחילה מה תחום ההגדרה של האגף השמאלי. כדי שאגף זה יהיה מוגדר, צריך להתקיים $x > 0$, וגם $\log_2 x \geq 0$. מתקיים $0 = \log_2 1$, והפונקציה $f(x) = \log_2 x$ עולה, לכן האי־שוויון $\log_2 x \geq 0$ שקול לכך ש- $x \geq 1$. תנאי זה גורר את התנאי $x > 0$. לכן האגף השמאלי מוגדר עבור $x \geq 1$, ובתנאי זה מוגדר גם האגף הימני. נניח מעתה שהתנאי $x \geq 1$ מתקיים.

נפשט את האגף הימני:

$$\log_4 \left(\frac{x}{4} \right) = \log_4 x - \log_4 4 = \log_4 x - 1 = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} - 1 = \frac{\log_2 x}{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x} \geq \frac{\log_2 x}{2} - 1 \quad \text{מתקבל האי־שוויון השקול:}$$

נגדיר: $t = \log_2 x$. מההגדרה (ומההנחה ש- $x \geq 1$) נובע ש- $t \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{t} \geq \frac{t}{2} - 1 \quad \text{מתקבל האי־שוויון השקול:}$$

נגדיר: $s = \sqrt{t}$. מההגדרה נובע ש- $s \geq 0$.

$$\Leftrightarrow s \geq \frac{s^2}{2} - 1 \quad \text{מתקבל האי־שוויון השקול:}$$

$$\Leftrightarrow 2s \geq s^2 - 2 \Leftrightarrow s^2 - 2s - 2 \leq 0$$

$$s = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{2} = 1 \pm \sqrt{3} \quad \text{פתרונות המשוואה } s^2 - 2s - 2 = 0 \text{ הם:}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} \leq s \leq 1 + \sqrt{3} \quad \text{לכן נקבל תנאי שקול}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq s \leq 1 + \sqrt{3} \quad \text{יחד עם האילוץ } s \geq 0 \text{ מתקבל התנאי השקול}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{t} \leq 1 + \sqrt{3} \quad \text{נחזור למשתנה } t:$$

נעלה בריבוע (מותר כי כל האגפים אי־שליליים):

$$\Leftrightarrow 0 \leq t \leq (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \log_2 x \leq 4 + 2\sqrt{3} \quad \text{נחזור למשתנה } x:$$

נפעיל על כל האגפים את הפונקציה העולה $f(x) = 2^x$:

$$\Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2^{4+2\sqrt{3}} = 2^4 \cdot 2^{2\sqrt{3}} = 16 \cdot 4^{\sqrt{3}}$$

קבוצת הפתרונות היא $[1, 16 \cdot 4^{\sqrt{3}}]$.

$$(\ln x)^{\ln x} > x^2 \quad \text{ד. נתון האי־שוויון:}$$

כדי שהאגף השמאלי יהיה מוגדר נדרש להתקיים $x > 0$ וגם $\ln x > 0$. מכיוון

ש- $0 = \ln 1$ והפונקציה $f(x) = \ln x$ עולה, התנאי האחרון שקול לכך ש- $x > 1$. לכן

האגף השמאלי מוגדר כאשר $x > 1$, ואנו נניח מעתה שתנאי זה מתקיים.

תחת הנחה זו, שני האגפים הם חיוביים. נפעיל על שני האגפים את הפונקציה העולה $f(x) = \ln x$:

$$\Leftrightarrow \ln((\ln x)^{\ln x}) > \ln x^2$$

$$\Leftrightarrow \ln x \cdot \ln \ln x > 2 \ln x \quad \text{לפי חוקי הלוגריתמים:}$$

$$\Leftrightarrow \ln \ln x > 2 \quad \text{כאמור, מתקיים } \ln x > 0. \text{ נחלק את שני האגפים במספר זה:}$$

$$\Leftrightarrow \ln x > e^2 \quad \text{נפעיל על שני האגפים את הפונקציה העולה } f(x) = e^x:$$

$$\Leftrightarrow x > e^{e^2} \quad \text{נפעיל שוב את אותה פונקציה:}$$

קבוצת הפתרונות היא (e^{e^2}, ∞) .

השאלה בעמוד 130

תשובה 20

מהנתון $\log_a b = 5$ נובע:

$$\log_{a^2} \sqrt[3]{b} = \frac{1}{3} \log_{a^2} b = \frac{1}{3} \frac{\log_a b}{\log_a a^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{6}$$

השאלה בעמוד 130

תשובה 21

א. נתונה המשוואה: $\ln(5x^2) = 8 + \ln x$

כדי שהאגף הימני יהיה מוגדר צריך להתקיים $x > 0$. נניח מעתה שתנאי זה מתקיים, ואז מוגדר גם האגף השמאלי. לפי חוקי הלוגריתמים, נקבל:

$$\Leftrightarrow \ln 5 + 2 \ln x = 8 + \ln x$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 8 - \ln 5$$

$$\Leftrightarrow x = e^{8 - \ln 5} = \frac{e^8}{e^{\ln 5}} = \frac{e^8}{5}$$

לכן הפתרון היחיד הוא $x = e^8/5 \approx 596.192$.

ב. נתונה המשוואה: $\log_8 x + \log_x 8 = 4$

כדי שהאגף השמאלי יהיה מוגדר צריך להתקיים $x > 0$ ו- $x \neq 1$. נניח מעתה שתנאי זה מתקיים.

נסמן: $t = \log_8 x$. מהתנאי $x \neq 1$ נובע ש- $t \neq 0$.

לפי הזהות $\log_b a = 1/\log_a b$ (ראו שאלה 15), מתקיים

$$\log_x 8 = \frac{1}{\log_8 x} = \frac{1}{t}$$

$$\Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה:}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + 1 = 4t \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

נבחן כל אפשרות בנפרד:

$$t = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \log_8 x = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 8^{2+\sqrt{3}}$$

$$t = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow \log_8 x = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 8^{2-\sqrt{3}}$$

לכן יש שני פתרונות למשוואה: $x = 8^{2 \pm \sqrt{3}}$.

$$x\sqrt{2} + x^2\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \text{ג. נתונה המשוואה:}$$

כדי שהאגף השמאלי יהיה מוגדר צריך להתקיים $x > 0$. נניח מעתה שתנאי זה מתקיים.

$$\text{נגדיר } t = x\sqrt{2}. \text{ לפי חוקי החזקות, } x^2\sqrt{2} = (x\sqrt{2})^2 = t^2.$$

$$\Leftrightarrow t + t^2 = \sqrt{2} \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה:}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

בחירת סימן המינוס מובילה לערך שלילי של t , מה שאינו אפשרי כי $t = x\sqrt{2} > 0$. לכן תיתכן רק האפשרות:

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

נשים לב שמספר זה הוא חיובי. נחזור למשתנה x :

$$\Leftrightarrow x\sqrt{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$$

כדי לפתור את המשוואה, נעלה את שני האגפים בחזקת $1/\sqrt{2}$:

$$\Leftrightarrow (x\sqrt{2})^{1/\sqrt{2}} = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2} \right)^{1/\sqrt{2}}$$

$$\text{האגף השמאלי הוא } x\sqrt{2}/\sqrt{2} = x^1 = x. \text{ מכאן:}$$

$$\Leftrightarrow x = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2} \right)^{1/\sqrt{2}} \approx 0.847$$

וזהו פתרון המשוואה היחיד.

$$x\sqrt{x} = 10 \quad \text{ד. נתונה המשוואה:}$$

כדי שהאגף השמאלי יהיה מוגדר צריך להתקיים $x \geq 0$. נניח מעתה שתנאי זה מתקיים, ונשים לב ש- $x > 0$ כי $x = 0$ לא מקיים את המשוואה.

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} = x^1 \cdot x^{0.5} = x^{1.5} = x^{3/2} \quad \text{נבטא את האגף השמאלי באופן הבא:}$$

$$\Leftrightarrow x^{3/2} = 10 \quad \text{מתקבלת המשוואה השקולה}$$

נעלה את שני האגפים בחזקת $2/3$. בדומה לפתרון הסעיף הקודם, נקבל שהאגף

$$\Leftrightarrow x = 10^{2/3} = (\sqrt[3]{10})^2 \quad \text{השמאלי הוא } x:$$

וזהו פתרון המשוואה היחיד.

תשובה 22

א. נתון האי-שוויון:

$$4^{x+1} + 10^{x+2} \geq 25^x$$

לפי חוקי החזקות:

$$4^{x+1} = 4^x \cdot 4^1 = 4 \cdot 4^x$$

$$10^{x+2} = 10^x \cdot 10^2 = 100 \cdot 10^x$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot 4^x + 100 \cdot 10^x \geq 25^x \quad \text{לפיכך:}$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \frac{4^x}{25^x} + 100 \cdot \frac{10^x}{25^x} \geq 1 \quad \text{נחלק את שני האגפים ב- } 25^x:$$

מתקבלת משוואה שקולה כי ניתן להעלות אותה בחזקת $\sqrt{2}$ ולקבל בחזרה את המשוואה הקודמת.

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x + 100 \cdot \left(\frac{10}{25}\right)^x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{4}{25}\right)^x + 100 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x \geq 1 \quad \text{נצמצם את השבר } 10/25:$$

כעת נגדיר: $t = \left(\frac{2}{5}\right)^x$. משתנה זה מקיים: $t > 0$. כמו כן,

$$t^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = \left(\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)^x = \left(\frac{4}{25}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 100t \geq 1 \Leftrightarrow 4t^2 + 100t - 1 \geq 0 \quad \text{מתקבל אי־שוויון שקול:}$$

נפתור את המשוואה הריבועית $4t^2 + 100t - 1 = 0$:

$$t_{1,2} = \frac{-100 \pm \sqrt{10016}}{8}$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{-100 - \sqrt{10016}}{8} < 0, \quad t_2 = \frac{-100 + \sqrt{10016}}{8} > 0$$

לפיכך האי־שוויון הריבועי שקול לתנאים הבאים:

$$\Leftrightarrow t \leq t_1 \text{ או } t \geq t_2$$

$$\Leftrightarrow t \geq t_2 \quad \text{האפשרות } t \leq t_1 \text{ לא תיתכן, כי } t > 0. \text{ נותרת האפשרות:}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x \geq t_2$$

הפונקציה $f(x) = \log_{2/5} x$ יורדת, כי $2/5 < 1$. נפעיל אותה על שני האגפים ונקבל אי־שוויון שקול בכיוון הפוך:

$$\Leftrightarrow x \leq \log_{2/5} t_2 = \log_{0.4} \left(\frac{-100 + \sqrt{10016}}{8} \right) \approx 5.026$$

קבוצת הפתרונות היא $(-\infty, \log_{2/5} t_2]$.

$$\log \sqrt{x} \leq \sqrt{\log x} \quad \text{ב. נתון האי־שוויון:}$$

כדי שהאגף השמאלי יהיה מוגדר צריך להתקיים $x > 0$ וגם $\log x \geq 0$, כלומר $x \geq 1$. תנאי זה מבטיח שגם האגף הימני יהיה מוגדר. נניח מעתה שתנאי זה מתקיים.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \log x \leq \sqrt{\log x} \quad \text{לפי חוקי החזקות, נקבל אי־שוויון שקול:}$$

נגדיר: $t = \log x$. בהתאם להנחה, מתקיים $t \geq 0$. נקבל משוואה שקולה:

$$\Leftrightarrow \frac{t}{2} \leq \sqrt{t}$$

עבור $t = 0$ האי־שוויון מתקיים. בהנחה ש־ $t > 0$, נחלק את שני האגפים ב־ $\sqrt{t}$,

$$\Leftrightarrow \sqrt{t} \leq 2$$

ונכפול ב־2:

$$\Leftrightarrow t \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \log x \leq 4$$

נחזור למשתנה המקורי:

$$\Leftrightarrow x \leq 10^4 = 10000$$

כאמור, הנחנו ש־ $x \geq 1$. קבוצת הפתרונות היא אפוא $[1, 10000]$.

ג. נתון האי־שוויון: $\ln(6-x) \leq 1 - \ln x$
 כדי שהאגף הימני יהיה מוגדר, צריך להתקיים $x > 0$. כדי שהאגף השמאלי יהיה מוגדר, צריך להתקיים $6-x > 0$, כלומר $x < 6$. נניח מעתה שמתקיים: $0 < x < 6$.
 נעביר אגפים: $\ln x + \ln(6-x) \leq 1$
 $\ln x(6-x) \leq 1 = \ln e$
 $x(6-x) \leq e$ מכיוון שהפונקציה $\ln$ עולה:
 $x^2 - 6x + e \geq 0$
 נפתור את המשוואה הריבועית:
 $x^2 - 6x + e = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-4e}}{2} = 3 \pm \sqrt{9-e}$
 נסמן: $x_1 = 3 - \sqrt{9-e}$, $x_2 = 3 + \sqrt{9-e}$
 אז $x_1 \approx 0.494$, $x_2 \approx 5.506$
 והאי־שוויון הריבועי שקול לתנאים: $x \leq x_1$ או $x \geq x_2$
 בשילוב עם ההנחה $0 < x < 6$ מתקבלים התנאים הבאים:
 $0 < x \leq x_1$ או $x_2 \leq x < 6$
 קבוצת הפתרונות היא $(0, x_1] \cup [x_2, 6) = (0, 3 - \sqrt{9-e}] \cup [3 + \sqrt{9-e}, 6)$.

השאלה בעמוד 130

תשובה 23

נתונה הסדרה ההנדסית $a_1, a_2, \dots, a_n$, שכל איבריה חיוביים. אז בהכרח $a_1 > 0$.
 $q = a_2/a_1 > 0$. לכל $1 \leq i \leq n-1$ מתקיים, לפי הגדרת הסדרה ההנדסית, $a_{i+1}/a_i = q$.
 לכן:

$$\frac{\sqrt[3]{a_{i+1}}}{\sqrt[3]{a_i}} = \sqrt[3]{\frac{a_{i+1}}{a_i}} = \sqrt[3]{q}$$

מכאן נובע שבסדרה $\sqrt[3]{a_1}, \sqrt[3]{a_2}, \dots, \sqrt[3]{a_n}$ היחס בין איברים סמוכים הוא קבוע. סדרה זו היא אפוא סדרה הנדסית.

השאלה בעמוד 130

תשובה 24

א. נסמן ב־ q את השיעור שבו מוכפל סכום החיסכון בשנה אחת. סכום החיסכון לאחר t

$$500 \cdot q^{3.5} = 700 \quad \text{שנים הוא } 500 \cdot q^t \text{ מהנתון נובע:}$$

$$\Rightarrow q^{3.5} = \frac{700}{500} = \frac{7}{5}$$

$$\Rightarrow q = \left(\frac{7}{5}\right)^{1/3.5} = \left(\frac{7}{5}\right)^{2/7} \approx 1.101$$

נסמן ב־ r את שיעור הריבית השנתית. אז $q = 1 + r$ ולכן

$$r = q - 1 = \left(\frac{7}{5}\right)^{2/7} - 1 \approx 0.101$$

שיעור הריבית הוא אפוא 10.1%.

ב. כדי לגלות מתי הגיע החיסכון ל-600 שקלים, נפתור את המשוואה:

$$500 \cdot q^t = 600$$

$$q^t = \frac{600}{500} = \frac{6}{5}$$

$$t = \log_q \frac{6}{5} = \frac{\ln \frac{6}{5}}{\ln q} = \frac{\ln 6 - \ln 5}{\ln \left(\left(\frac{7}{5} \right)^{2/7} \right)} = \frac{\ln 6 - \ln 5}{\frac{2}{7} \ln \frac{7}{5}} = \frac{7}{2} \cdot \frac{\ln 6 - \ln 5}{\ln 7 - \ln 5} \approx 1.89$$

החיסכון הגיע ל-600 שקלים כ-1.89 שנים לאחר ההפקדה הראשונית.

השאלה בעמוד 130

תשובה 25

נתון $a \neq 0$, ונתונה הפונקציה: $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^a$

א. נניח ש- $a > 0$ ונוכיח ש- f עולה:

יהיו x_1, x_2 מספרים ממשיים חיוביים המקיימים $x_1 < x_2$. אז $x_2/x_1 > 1$. הפונקציה

$$\begin{aligned} g(t) &= (x_2/x_1)^t \text{ עולה, ולכן} \\ \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^a &> \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^0 = 1 \\ \Rightarrow \frac{x_2^a}{x_1^a} &> 1 \Rightarrow x_2^a > x_1^a \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \end{aligned}$$

לכן f עולה.

כעת נניח ש- $a < 0$, ונוכיח ש- f יורדת:

בדומה למקרה הקודם, אם $x_1 < x_2$ אז $x_2/x_1 > 1$ ולכן

$$\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^a < \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^0 = 1 \Rightarrow \frac{x_2^a}{x_1^a} < 1 \Rightarrow x_2^a < x_1^a \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

לכן f יורדת.

ב. נוכיח שתמונת הפונקציה f היא $(0, \infty)$. לכל $x \in (0, \infty)$ מתקיים $f(x) = x^a > 0$,

כלומר $f(x) \in (0, \infty)$. כעת יהי y מספר חיובי כלשהו. נגדיר $x = y^{1/a}$. אז

$$f(x) = x^a = (y^{1/a})^a = y^{(1/a)a} = y^1 = y \quad x \in (0, \infty) \text{ ומתקיים:}$$

לכן y הוא ערך של הפונקציה f . לכן $\text{Im } f = (0, \infty)$.

ג. בסעיף א הוכחנו שהפונקציה f היא מונוטונית, ולכן היא חח"ע. נמצא את הפונקציה

ההפוכה: אם $y \in (0, \infty)$ ו- $f(x) = y$ אז כפי שראינו בסעיף ב, $f(y^{1/a}) = y$, ומכך

ש- f חח"ע נובע ש- $x = y^{1/a}$. לכן $f^{-1}(y) = y^{1/a}$, ומכאן ש- $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$

היא הפונקציה $f^{-1}(x) = x^{1/a}$.

בפרט, במקרה ש- a מספר טבעי, הפונקציה ההפוכה היא פונקציית השורש מסדר a :

$$f^{-1}(x) = \sqrt[a]{x}$$

השאלה בעמוד 130

תשובה 26

פונקציית הלוגריתם לפי בסיס a היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f_1(x) = a^x$. כאשר a מספר טבעי, פונקציית השורש מסדר a היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה $f_2(x) = x^a$. ההבדל בין שני המקרים הוא שבמקרה הראשון בסיס החזקה, a , הוא מספר קבוע ומעריך החזקה, x , משתנה; ובמקרה השני מעריך החזקה, a , הוא קבוע, ובסיס החזקה, x , משתנה.

השאלה בעמוד 131

תשובה 27

נניח ש- $m \in \mathbb{Z}$, $m' \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $n' \in \mathbb{N}$ כך ש- $m/n = m'/n'$, ויהי a מספר ממשי חיובי. נוכיח שמתקיים $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[n']{a})^{m'}$. נגדיר $x_1 = (\sqrt[n]{a})^m$, $x_2 = (\sqrt[n']{a})^{m'}$. נתבונן בחזקות ה- nn' של מספרים אלה:

$$x_1^{nn'} = (\sqrt[n]{a})^{mnn'} = \left((\sqrt[n]{a})^n \right)^{mn'} = a^{mn'}$$

$$x_2^{nn'} = (\sqrt[n']{a})^{m'nn'} = \left((\sqrt[n']{a})^{n'} \right)^{m'n} = a^{m'n}$$

מהנתון $m/n = m'/n'$ נובע (על ידי כפל באלכסון) $mn' = m'n$. לכן $x_1^{nn'} = x_2^{nn'}$. כעת נתבונן בפונקציה $f(x) = x^{nn'}$. כפי שהוכחנו בשאלה 30 בשיעור 6, f מונוטונית בקטע $[0, \infty)$ ולכן חח"ע בקטע זה. מהשוויון $f(x_1) = f(x_2)$ נסיק ש- $x_1 = x_2$, כפי שרצינו להוכיח.

השאלה בעמוד 131

תשובה 28

א. המספר הטבעי הקטן ביותר בעל k ספרות הוא: $10^{k-1} = \frac{1000 \dots 000}{\text{פעמים } k-1}$

המספר הטבעי הגדול ביותר בעל k ספרות הוא: $10^k - 1 = \frac{999 \dots 999}{\text{פעמים } k}$

לכן, בהינתן מספר טבעי n שהייצוג העשרוני שלו הוא בעל k ספרות, מתקיימים האי-שוויונות

$$10^{k-1} \leq n < 10^k$$

נפעיל את הפונקציה העולה $f(x) = \log x$ על כל האגפים:

$$\Rightarrow k-1 \leq \log n < k$$

לפי הגדרת החלק השלם (ראו שיעור 6), מכאן נובע

$$\Rightarrow k-1 = \lfloor \log n \rfloor$$

$$\Rightarrow k = \lfloor \log n \rfloor + 1$$

ולכן

הוכחנו את הנוסחה המבוקשת.

ב. לפי הנוסחה שהוכחנו בסעיף הקודם, מספר הספרות בייצוג העשרוני של 2^{1000} הוא

$$\lfloor \log(2^{1000}) \rfloor + 1 = \lfloor 1000 \cdot \log 2 \rfloor + 1$$

הספרות הראשונות בייצוג העשרוני של $\log 2$ הן:

$$\log 2 = 0.301029995 \dots$$

$$\Rightarrow 1000 \log 2 = 301.029995 \dots$$

$$\Rightarrow \lfloor 1000 \log 2 \rfloor = 301$$

לכן במספר 2^{1000} יש 302 ספרות בייצוג עשרוני.

$$\log_2 2^{1,000,000} = 1,000,000 \log 2 = 301029.995\dots \quad \text{כמו כן,}$$

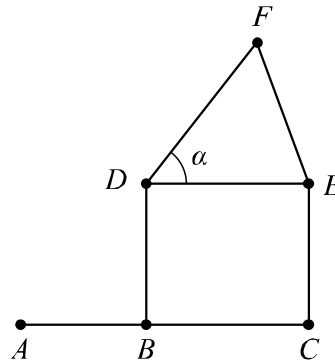
$$\Rightarrow \lfloor \log_2 2^{1,000,000} \rfloor + 1 = 301029 + 1 = 301030$$

לכן במספר $2^{1000000}$ יש 301,030 ספרות בייצוג עשרוני.

פתרונות לשאלות בשיעור 8

תשובה 1

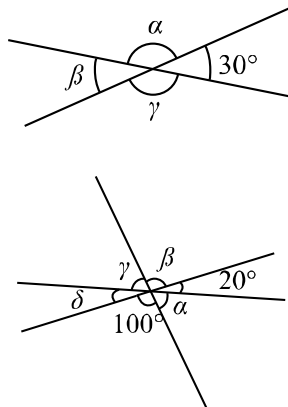
השאלה בעמוד 139



- א. $\angle ABD = 90^\circ$. זווית זו היא ישרה.
 ב. $\angle FED = 70^\circ$. זווית זו היא חדה.
 ג. $\angle DEF = \angle FED = 70^\circ$. זווית זו היא חדה.
 ד. $\angle ABC = 180^\circ$. זווית זו היא שטוחה.
 ה. $\angle FDE = 50^\circ$. זווית זו היא חדה.
 ו. $\angle DFE = 60^\circ$. זווית זו היא חדה.
 ז. $\angle BDF = 140^\circ$. זווית זו היא קהה.
 ח. $\angle FEC = 160^\circ$. זווית זו היא קהה.

תשובה 2

השאלה בעמוד 140



- א. α היא זווית משלימה לזווית של 30° , וכמותה גם γ . לכן

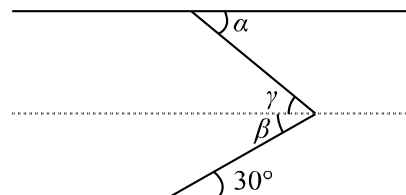
$$\alpha = \gamma = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$
 β היא זווית קודקודית לזווית של 30° , לכן $\beta = 30^\circ$.
 ב. δ היא זווית קודקודית לזווית של 20° , לכן $\delta = 20^\circ$.
 β היא זווית קודקודית לזווית של 100° , לכן $\beta = 100^\circ$.
 הזוויות β, γ, δ מכסות ביחד זווית שטוחה, לכן

$$\beta + \gamma + \delta = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \gamma = 180^\circ - \beta - \delta = 180^\circ - 100^\circ - 20^\circ = 60^\circ$$
 הזווית α קודקודית לזווית γ , לכן $\alpha = \gamma = 60^\circ$.

תשובה 3

השאלה בעמוד 142

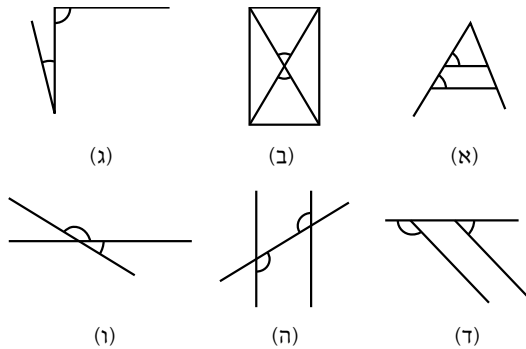


- לפי הנתון, $\beta + \gamma = 70^\circ$.
 β היא זווית מתחלפת עם זווית של 30° , לכן $\beta = 30^\circ$.
 מכאן, $\gamma = 70^\circ - \beta = 40^\circ$.
 הזווית α מתחלפת עם γ . לכן $\alpha = 40^\circ$.

השאלה בעמוד 143

תשובה 4

- א. זוויות מתאימות.
- ב. זוויות קודקדיות.
- ג. אין קשר בין הזוויות.
- ד. זוויות חד-צדדיות.
- ה. זוויות מתחלפות.
- ו. זוויות משלימות.



תשובה 5

א. סכום הזוויות במשולש הוא 180° , ולכן

$$\alpha + 105^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 180^\circ - 145^\circ = 35^\circ$$

ב. באופן דומה:

$$\alpha + 90^\circ + 35^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$$

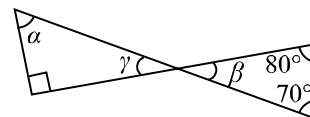
ג. באופן דומה:

$$\alpha + 2\alpha + 120^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 3\alpha = 60^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 20^\circ$$

ד. נסמן את הזוויות הבאות:



מהמשולש הימני נקבל:

$$\beta + 70^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \beta = 30^\circ$$

γ היא קודקדית ל- β , לכן $\gamma = 30^\circ$.

מהמשולש השמאלי נקבל:

$$\alpha + 90^\circ + \gamma = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 90^\circ - \gamma = 60^\circ$$

השאלה בעמוד 146

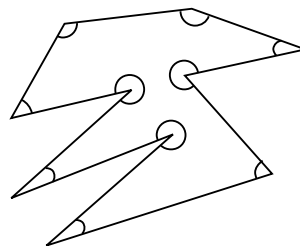
תשובה 6

נניח, בשלילה, שבמשולש מסויים יש שתי זוויות שהן קהות או ישרות. נסמן זוויות אלה α ו- β . מתקיים אפוא $\alpha \geq 90^\circ$ ו- $\beta \geq 90^\circ$.
 תהי γ הזווית השלישית במשולש. בוודאי מתקיים $\gamma > 0$. לכן:
 $180^\circ = \alpha + \beta + \gamma \geq 90^\circ + 90^\circ + \gamma > 180^\circ$
 קיבלנו סתירה, ולכן יש במשולש לכל היותר זווית אחת שהיא קהה או ישרה.

השאלה בעמוד 149

תשובה 7

נקפיד לסמן את זוויות המצולע בתוך המצולע:

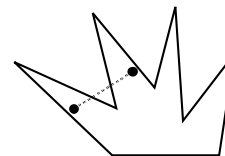
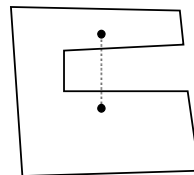


השאלה בעמוד 149

תשובה 8

המצולעים בסעיפים א, ג, קמורים.

המצולעים בסעיפים ב, ד אינם קמורים. באיורים מודגם זוג נקודות בתוך כל מצולע, שהקטע ביניהן אינו נמצא כולו בתוך המצולע.



השאלה בעמוד 153

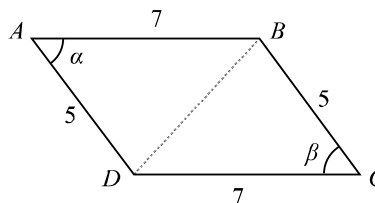
תשובה 9

א. $\triangle ABC \cong \triangle FED$ ב. $ABCD \cong FEHG$

ג. המצולעים אינם חופפים, כי במצולע הימני יש רק צלע אחת שאורכה 2, ובמצולע השמאלי יש שתי צלעות כאלה.

השאלה בעמוד 157

תשובה 10

א. נסמן את קודקודי המרובע ב- A, B, C, D , ונעביר את הקטע BD :

$$\overline{AB} = \overline{CD} = 7$$

$$\overline{AD} = \overline{CB} = 5$$

$$\overline{BD} = \overline{DB}$$

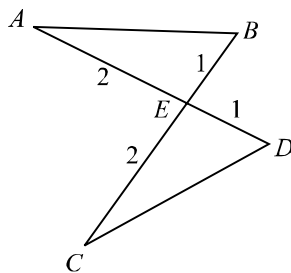
$$\triangle ABD \cong \triangle CDB$$

נתבונן במשולשים $\triangle CDB$, $\triangle ABD$:

לפי משפט החפיפה צ.צ.צ.:

לפיכך $\angle A = \angle C$, כלומר $\alpha = \beta$.

□



השאלה בעמוד 158

$$\angle AEB = \angle CED$$

$$\overline{AE} = \overline{CE} = 2$$

$$\overline{BE} = \overline{DE} = 1$$

$$\triangle AEB \cong \triangle CED$$

$$\overline{AB} = \overline{CD}$$

□

ב. הזוויות $\angle AEB$, $\angle CED$ הן קודקדיות. לכן:
כמו כן מתקיים:

לפי משפט החפיפה צ.ז.צ:

בפרט:

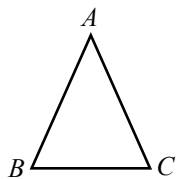
תשובה 11

א. נתון משולש שווה-שוקיים ובו זוויות הבסיס הן 20° . נסמן ב- α את זווית הראש במשולש. זוויות המשולש הן אפוא $20^\circ, 20^\circ, \alpha$. סכום הזוויות במשולש הוא 180° , ולכן:

$$\alpha + 20^\circ + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 140^\circ$$

ב. נתון משולש שווה-שוקיים ובו זווית הראש היא 80° . נסמן ב- α את גודל זוויות הבסיס. בדומה לסעיף הקודם: $\alpha + \alpha + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 100^\circ \Rightarrow \alpha = 50^\circ$

השאלה בעמוד 158



$$\angle B = \angle C$$

$$\angle C = \angle B$$

$$\overline{CB} = \overline{BC}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle ACB$$

$$\overline{AB} = \overline{AC}$$

□

נניח שבמשולש $\triangle ABC$ מתקיים $\angle B = \angle C$, ונוכיח ש- $\overline{AB} = \overline{AC}$:

נתבונן במשולשים $\triangle ACB$, $\triangle ABC$:

לפיכך, לפי משפט החפיפה צ.ז.צ:

מכאן נובע:

השאלה בעמוד 158

תשובה 13

נניח שבמשולש $\triangle ABC$ מתקיים $\angle A = \angle B = \angle C$.

בפרט מתקיים $\angle B = \angle C$, ולפי משפט 8.23 (שהוכחנו בשאלה הקודמת), הצלעות שמול זוויות אלה שוות, כלומר $\overline{AC} = \overline{AB}$.

כמו כן מתקיים $\angle A = \angle B$ ולפי אותו משפט, נובע ש- $\overline{BC} = \overline{AC}$.

קיבלנו ש- $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, לכן $\triangle ABC$ הוא שווה-צלעות.

□

השאלה בעמוד 160

תשובה 14

נתבונן במשולש $\triangle ABC$.

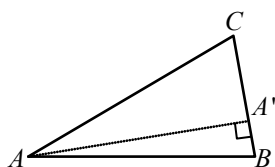
נתון ש- $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 70^\circ$.

מהמשולש $\triangle AA'C$ מתקבל:

$$\angle A'AC + \angle C + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle A'AC = 90^\circ - \angle C = 20^\circ$$

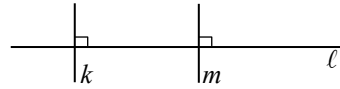
מהמשולש $\triangle AA'B$ מתקבל:

$$\angle A'AB + \angle B + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle A'AB = 90^\circ - \angle B = 10^\circ$$



השאלה בעמוד 160

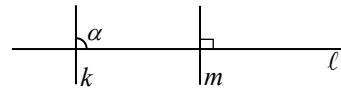
תשובה 15

א. נניח ש- m ו- k מאונכים לישר ℓ :

m ו- k יוצרים זוויות מתאימות זהות עם הישר ℓ , ולפי משפט 8.10, הם מקבילים או זהים. $\square$

ב. נניח ש- $m \perp \ell$ ו- $k \parallel m$. הישר k אינו מקביל ל- ℓ (כי אילו הוא היה מקביל ל- ℓ , אז לפי משפט 8.5 גם m היה מקביל ל- ℓ , בסתירה להנחה).

קעת נתבונן בישרים m, k ו- ℓ :



הזווית α שבאיור מתאימה לזווית הישרה שבין m ו- ℓ , ולכן (כזוויות מתאימות בין ישרים מקבילים), $\alpha = 90^\circ$. לפיכך, $k \perp \ell$. $\square$

השאלה בעמוד 161

תשובה 16

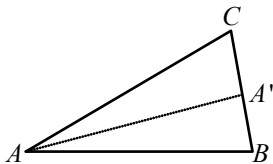
נתבונן במשולש $\triangle ABC$.

נתון ש- $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 70^\circ$.

AA' הוא חוצה הזווית $\angle A$, לכן $\angle BAA' = \angle CAA' = 15^\circ$.

מהמשולש $\triangle AA'C$ נקבל: $\angle CAA' + \angle C + \angle AA'C = 180^\circ$

$$\Rightarrow \angle AA'C = 180^\circ - \angle CAA' - \angle C = 180^\circ - 15^\circ - 70^\circ = 95^\circ$$



השאלה בעמוד 161

תשובה 17

נתבונן במשולש $\triangle ABC$, ונניח שמתקיים $\overline{AB} = \overline{AC}$.

יהי AA' התיכון לצלע BC : $\overline{BA'} = \overline{CA'}$

מתקיימים אפוא השוויונות הבאים: $\overline{AB} = \overline{AC}$; $\overline{AA'} = \overline{AA'}$; $\overline{BA'} = \overline{CA'}$

לפי משפט החפיפה צ.צ.צ: $\triangle ABA' \cong \triangle ACA'$

בפרט מתקיים $\angle BAA' = \angle CAA'$, לכן AA' הוא חוצה הזווית $\angle A$.

כמו כן, $\angle AA'B = \angle AA'C$

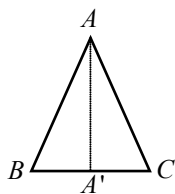
הזוויות $\angle AA'B, \angle AA'C$ הן זוויות משלימות, לכן $\angle AA'B + \angle AA'C = 180^\circ$

כלומר: $2\angle AA'B = 180^\circ$

ומכאן, $\angle AA'B = 90^\circ$

לכן AA' הוא גם הגובה מהקודקוד A אל הצלע BC .

הוכחנו אפוא שבמשולש זה הגובה, התיכון וחוצה הזווית, היוצאים מהקודקוד A , מתלכדים. $\square$



השאלה בעמוד 163

תשובה 18

- א. טרפז
ג. ריבוע
ה. מלבן
ז. מרובע (ללא אפיון מיוחד)
- ב. דלתון
ד. מקבילית
ו. דלתון
ח. מעוין

השאלה בעמוד 164

תשובה 19

בשאלה 10א הוכחנו שמרובע בעל זוג צלעות נגדיות באורך 7, וזוג צלעות נגדיות באורך 5, הוא מקבילית. ההוכחה למקרה הכללי – זהה.

השאלה בעמוד 164

תשובה 20

א. נתבונן בדלתון הקמור $ABCD$ ($\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{CB} = \overline{CD}$), ובאלכסונים AC (הנקרא: **אלכסון ראשי**) ו- BD (הנקרא: **אלכסון משני**). נסמן ב- E את נקודת מפגש האלכסונים.

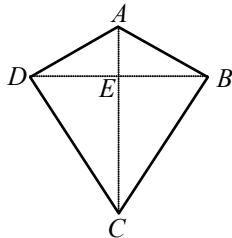
$$\triangle ABC \cong \triangle ADC \quad \text{לפי משפט החפיפה צ.צ.צ.}$$

$$\angle DAC = \angle BAC \quad \text{לכן}$$

$$\angle DAE = \angle BAE \quad \text{ומכאן}$$

המשולש DAB הוא שווה-שוקיים ($\overline{AB} = \overline{AD}$), ו- AE הוא חוצה זווית הראש במשולש זה. לפי משפט 8.27, AE הוא גם תיכון וגובה במשולש זה.

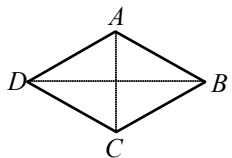
לפיכך, $DE = BE$ ו- $AE \perp BD$. מכאן, האלכסון AC חוצה את האלכסון BD וניצב לו. $\square$



ב. במעוין $ABCD$, כל הצלעות שוות זו לזו באורכן.

בפרט: $\overline{AB} = \overline{AD}$, $\overline{CB} = \overline{CD}$ ולכן (לפי סעיף א) האלכסון AC חוצה את האלכסון BD וניצב לו. באופן דומה, $\overline{BA} = \overline{BC}$, $\overline{DA} = \overline{DC}$ ולכן האלכסון BD חוצה את האלכסון AC . לכן שני האלכסונים ניצבים זה לזה וחוצים זה את זה.

לבסוף, כל ריבוע הוא מעוין ולכן אותה מסקנה תקפה לגביו. $\square$

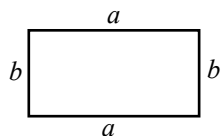


השאלה בעמוד 164

תשובה 21

א. בהינתן מלבן שאורכו הוא a ורוחבו הוא b , למלבן יש שתי צלעות שאורכן a ושתי צלעות שאורכן b . לכן היקפו הוא $a + a + b + b = 2a + 2b$.

הערה: אורכו של מלבן הוא האורך של זוג הצלעות הארוכות שבו, ורוחבו של המלבן הוא האורך של זוג הצלעות הקצרות.



ב. נניח שאורכי צלעותיו של משולש הן a, b, c .

היקף המשולש הוא $p = a + b + c$. נוכיח ש- $a < p/2$ (ובאופן דומה נוכל להוכיח

ש- $b < p/2$ ו- $c < p/2$):

לפי אי-שוויון המשולש,

נוסיף a לשני האגפים:

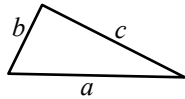
נחלק ב-2:

$$a < b + c$$

$$2a < a + b + c = p$$

□

$$a < p/2$$



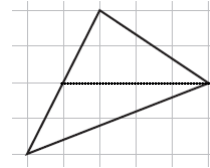
השאלה בעמוד 167

תשובה 22

א. המשולש הוא ישר-זווית ואורכי ניצביו הם 3 ו-6. שטחו הוא $\frac{3 \cdot 6}{2} = 9$

ב. אורך הבסיס הוא 5 וגובה המשולש הוא 4. שטח המשולש הוא $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$

ג. נחלק את המשולש לשני חלקים כמתואר באיור:



לכל אחד מהחלקים יש בסיס באורך 4, וגובהו הוא 2. לכן שטח המשולש הוא

$$\frac{4 \cdot 2}{2} + \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 + 4 = 8$$

השאלה בעמוד 168

תשובה 23

א. הצורה היא טרפז. אורכי הבסיסים הם 2 ו-5. גובה הטרפז הוא 3.

$$\frac{2+5}{2} \cdot 3 = 10\frac{1}{2}$$

שטח הטרפז הוא

ב. הצורה היא מקבילית. אורך הצלע התחתונה של המקבילית הוא 3, והגובה לצלע זו הוא

$$3 \cdot 4 = 12$$

4. שטח המקבילית הוא

השאלה בעמוד 168

תשובה 24

נתבונן בדלתון הקמור $ABCD$, ותהי E נקודת המפגש של אלכסוניו.

כפי שהוכחנו בשאלה 20, מתקיים $AC \perp BD$.

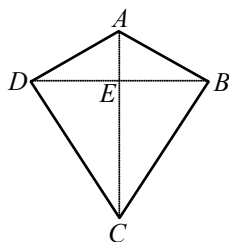
לפיכך, AE הוא הגובה במשולש $\triangle ADB$, ו- CE הוא הגובה במשולש $\triangle CDB$.

לכן:

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= S_{\triangle ADB} + S_{\triangle CDB} = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{AE}}{2} + \frac{\overline{DB} \cdot \overline{CE}}{2} \\ &= \frac{\overline{DB} \cdot (\overline{AE} + \overline{CE})}{2} = \frac{\overline{DB} \cdot \overline{AC}}{2} \end{aligned}$$

□

כלומר, שטח הדלתון שווה למחצית מכפלת אלכסוניו.



השאלה בעמוד 170

תשובה 25

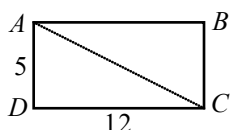
א. אורך היתר, c , מקיים (לפי משפט פיתגורס):
 $c^2 = 1^2 + 2^2 = 5$
 $c = \sqrt{5}$ (היות ש- $c > 0$):

ב. נתון משולש ישר-זווית ושווה-שוקיים. שתי זוויות במשולש שוות זו לזו, והן לא יכולות להיות ישרות (לפי שאלה 6). לכן שתי הזוויות שבין הניצבים ליתר שוות זו לזו, ומכאן שהניצבים שווים זה לזה. אורך היתר הוא 3. לכן אורכי הניצבים, $a = b$, מקיימים:

$$a^2 + a^2 = 3^2 \Rightarrow 2a^2 = 9 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{9}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

אורך כל אחד מהניצבים הוא $3\sqrt{2}/2$.

ג. נתבונן במלבן שמימדיו הם 12×5 .



המשולש $\triangle ABC$ הוא ישר-זווית. לפי משפט פיתגורס:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 = 5^2 + 12^2 = 169$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{169} = 13$$

אורך האלכסון הוא 13.

השאלה בעמוד 170

תשובה 26

נתון ש- P' היא היטל הנקודה P על הישר ℓ .

תהי $Q \neq P'$ נקודה כלשהי על הישר ℓ , ונוכיח ש- $\overline{PQ} > \overline{PP'}$, ולפי משפט פיתגורס, המשולש $\triangle PP'Q$ הוא ישר-זווית.

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PP'}^2 + \overline{P'Q}^2$$

$$\overline{PQ}^2 > \overline{PP'}^2$$

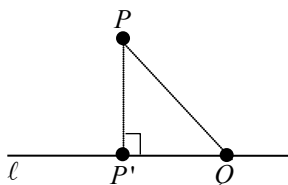
$$\overline{PQ} > \overline{PP'}$$

לפיכך,

ולכן (היות ש- $\overline{PP'}$, $\overline{PQ}$ חיוביים)

לכן P' היא הנקודה על הישר ℓ שמרחקה מ- P הוא הקטן ביותר.

□



השאלה בעמוד 171

תשובה 27

א. נתון משולש שאורכי צלעותיו הם $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$.

$$p = \frac{5 + 6 + 7}{2} = 9$$

מחצית היקפו היא

לפי נוסחת הרון, שטח המשולש הוא

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-6) \cdot (9-7)}$$

$$= \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}$$

ב. נסמן ב- h_a, h_b, h_c את הגבהים לצלעות a, b, c בהתאמה.

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

לפי נוסחת השטח של משולש,

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{12\sqrt{6}}{5}$$

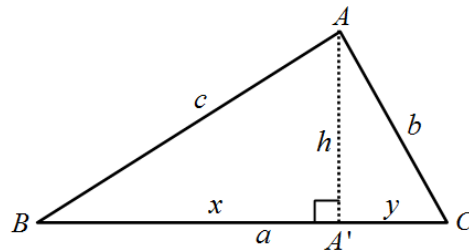
לפיכך,

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{12\sqrt{6}}{7}$$

השאלה בעמוד 171

תשובה 28

נתבונן במשולש $\triangle ABC$, ויהי AA' הגובה מהנקודה A :נסמן $h = \overline{AA'}$ (גובה המשולש), $x = \overline{BA'}$, $y = \overline{A'C}$.

$$(1) \quad x + y = a \quad \text{מהגדרות נובע:}$$

$$(2) \quad h^2 + y^2 = b^2 \quad \text{וממשפט פיתגורס:}$$

$$(3) \quad h^2 + x^2 = c^2$$

נתבונן על שוויונות אלה כמשוואות בנעלמים x, y, h .

$$x^2 - y^2 = c^2 - b^2 \quad \text{נחסר את המשוואה (2) מ־(3):}$$

$$(x + y)(x - y) = c^2 - b^2 \quad \text{כלומר}$$

$$x - y = \frac{c^2 - b^2}{a} \quad \text{נחלק במשוואה (1):}$$

$$2x = \frac{c^2 - b^2}{a} + a = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{a} \quad \text{נחבר למשוואה זו את משוואה (1):}$$

$$x = \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \quad \text{נחלק ב־2:}$$

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c + x)(c - x) \quad \text{מהמשוואה (3) נקבל:}$$

$$\begin{aligned} &= \left(c + \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right) \left(c - \frac{c^2 - b^2 + a^2}{2a} \right) \\ &= \frac{2ac + c^2 - b^2 + a^2}{2a} \cdot \frac{2ac - c^2 + b^2 - a^2}{2a} \\ &= \frac{(a + c)^2 - b^2}{2a} \cdot \frac{b^2 - (a - c)^2}{2a} \\ &= \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + (a - c))(b - (a - c))}{4a^2} \\ &= \frac{(a + b + c)(a + c - b)(a + b - c)(-a + b + c)}{4a^2} \end{aligned}$$

נגדיר: $p = (a + b + c)/2$, אז $2p = a + b + c$ ולכן

$$h^2 = \frac{2p(2p - 2b)(2p - 2c)(2p - 2a)}{4a^2} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{a^2}$$

$$h = \frac{2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{a} \quad \text{לפיכך,}$$

$$\square \quad S = \frac{a \cdot h}{2} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} \quad \text{ולכן שטח המשולש הוא}$$

השאלה בעמוד 172

תשובה 29

א. פתרון על ידי השוואת יחסים פנימיים: $\frac{x}{5} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$

פתרון על ידי השוואת יחסים חיצוניים: $\frac{x}{3} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = 3 \cdot \frac{5}{4} = 3\frac{3}{4}$

יחס הדמיון הוא $5/4$.

ב. פתרון על ידי השוואת יחסים פנימיים: $\frac{x+3}{x} = \frac{3}{2}$
 $\Rightarrow 1 + \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{3}{x} = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow 3 \cdot 2 = x \cdot 1 \Rightarrow x = 6$

פתרון על ידי השוואת יחסים חיצוניים: $\frac{x+3}{3} = \frac{x}{2}$
 $\Rightarrow 2(x+3) = 3x \Rightarrow 2x + 6 = 3x \Rightarrow x = 6$

יחס הדמיון הוא $x/2 = 6/2 = 3$.

השאלה בעמוד 173

תשובה 30

א. כל שני ריבועים הם דומים, כי כל צלעות הריבוע שוות זו לזו באורך, וכל זוויות הריבוע 90° . לכן בהינתן ריבוע שאורך צלעו a וריבוע שאורך צלעו b , יחס הדמיון ביניהם הוא b/a .

ב. לא כל שני מלבנים הם דומים.

נתבונן, למשל, במלבן שאורכו 2 ורוחבו 1, ובמלבן שאורכו 3 ורוחבו 1. הם אינם דומים כי היחסים הפנימיים בין צלעותיהם שונים.

ג. כל שני משולשים שווֹי־צלעות הם דומים, כי כל צלעות משולש כזה שוות זו לזו באורך, וכל זוויותיו הן 60° . לכן בהינתן שני משולשים שווֹי־צלעות, האחד בעל אורך צלע של a והשני בעל אורך צלע של b , יחס הדמיון ביניהם הוא b/a .

ד. לא כל שני משולשים שווֹי־שוקיים הם דומים. לדוגמה, נתבונן במשולש שווה־צלעות ובמשולש שווה־שוקיים וישר־זווית. זוויותיו של המשולש שווה הצלעות הן $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$. זוויותיו של המשולש שווה השוקיים וישר הזווית הן $90^\circ, 45^\circ, 45^\circ$. המשולשים שונים זה מזה בזוויותיהם, ולכן אינם דומים.

השאלה בעמוד 175

תשובה 31

כזוויות מתאימות בין ישרים מקבילים, מתקיימים השוויונות

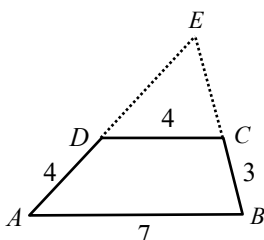
$$\angle ECD = \angle EBA, \angle EDC = \angle EAB$$

$$\triangle EDC \sim \triangle EAB$$

לכן:

$$\frac{EA}{ED} = \frac{AB}{DC} = \frac{7}{4}$$

מכאן



$$\frac{\overline{EA}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{ED} + \overline{DA}}{\overline{ED}} = 1 + \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} \quad \text{מאידך:}$$

$$1 + \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{ED}} = \frac{3}{4} \quad \text{לכן}$$

$$\Rightarrow \overline{ED} = \frac{4}{3} \cdot \overline{DA} = \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$$

$$\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{7}{4} \quad \text{באופן דומה:}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \overline{EC} = \frac{4}{3} \cdot \overline{BC} = \frac{4}{3} \cdot 3 = \frac{12}{3} = 4$$

השאלה בעמוד 178

תשובה 32

א. קוטר הגלגל הוא 50 ס"מ, שהם חצי מטר. לכן היקף הגלגל הוא

$$\pi \cdot \frac{1}{2} \approx 1.57$$

כלומר מטר אחד וחמישים ושבעה ס"מ.

ב. לאחר שישה סיבובים מלאים של הגלגל, המכונית עברה מרחק של

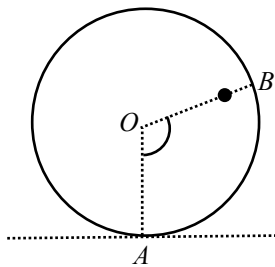
$$6 \cdot \frac{\pi}{2} = 3\pi \approx 9.42$$

כלומר תשעה מטרים וארבעים ושניים סנטימטרים.

אורך הקשת שמקצה הזווית $\angle AOB$ על גלגל המכונית שווה למרחק הנותר.

$$\frac{\angle AOB}{360^\circ} \cdot \frac{\pi}{2} = 10 - 3\pi \quad \text{לפיכך, הזווית } \angle AOB \text{ מקיימת:}$$

$$\Rightarrow \angle AOB = 360 \cdot \frac{2}{\pi} \cdot (10 - 3\pi) \approx 132^\circ$$



השאלה בעמוד 181

תשובה 33

נעביר את המיתרים AD, BC במעגל.

מתקיימים השוויונות:

(שוויון זוויות קודקודיות)

$$\angle AED = \angle CEB$$

(שוויון זוויות היקפיות הנשענות על אותו המיתר, AC)

$$\angle ADE = \angle CBE$$

לפיכך:

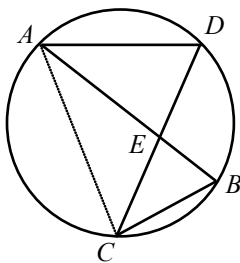
$$\triangle ADE \sim \triangle CBE$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{EB}}$$

מכאן נובע:

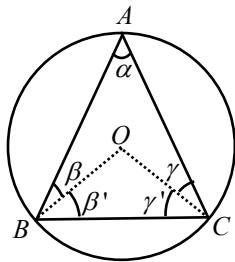
$$\overline{AE} \cdot \overline{EB} = \overline{CE} \cdot \overline{ED}$$

נכפיל באלכסון:



□

השאלה בעמוד 182



נסמן את הנקודות שעל המעגל ב- A, B, C . נעביר את המיתר BC , ונסמן את הזוויות β', γ' שבאיור.

$$\alpha = \frac{\angle BOC}{2}$$

לפי משפט 8.34,

$$(1) \quad \angle BOC + \beta' + \gamma' = 180^\circ$$

מהמשולש $\triangle BOC$ נקבל

$$(2) \quad \alpha + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 180^\circ$$

מהמשולש $\triangle ABC$ נקבל

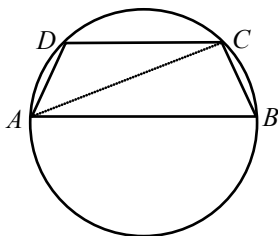
$$\alpha + \beta + \gamma - \angle BOC = 0$$

נחסר את השוויון (1) מהשוויון (2):

$$\square \quad \beta + \gamma = \angle BOC - \alpha = 2\alpha - \alpha = \alpha$$

לפיכך

השאלה בעמוד 182



תשובה 35

נתון: $AB \parallel CD$.

נעביר את האלכסון AC .

הזוויות $\angle CAB$ ו- $\angle DCA$ שוות כזוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים.

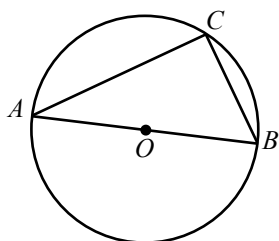
זוויות אלה הן זוויות היקפיות הנשענות על המיתרים AD, BC .

לפי משפט 8.35, גם הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתרים אלה שוות.

לפי משפט 8.34, המיתרים AD, BC שווים באורכם.

□

השאלה בעמוד 182



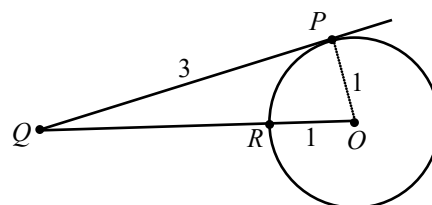
תשובה 36

נתבונן בזווית ההיקפית ACB הנשענת על הקוטר AB . נסמן ב- O את מרכז המעגל.

הזווית AOB היא שטוחה, כלומר $\angle AOB = 180^\circ$. לפי משפט 8.35:

$$\square \quad \angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = 90^\circ$$

השאלה בעמוד 183



תשובה 37

נעביר את הרדיוס OP .

לפי משפט 8.38, $\angle OPQ = 90^\circ$.

לפי משפט פיתגורס,

$$\overline{QO}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PQ}^2 = 10$$

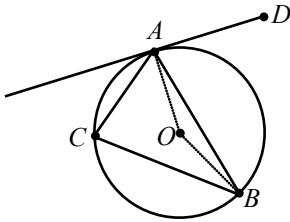
$$\Rightarrow \overline{QO} = \sqrt{10}$$

$$\overline{QR} = \overline{QO} - \overline{OR} = \sqrt{10} - 1$$

לבסוף,

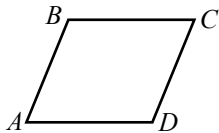
$$\angle \text{ לפי הנתון: } \overline{PQ} = 3$$

השאלה בעמוד 184



תשובה 38
 נעביר את הרדיוסים OA, OB .
 לפי משפט 8.38, $OA \perp AD$. מכאן:
 לפי משפט 8.35,
 המשולש $\triangle AOB$ שווה-שוקיים, ולכן
 נסכם את הזוויות במשולש $\triangle AOB$:
 נחלק ב-2:
 מכאן
 $\square \Rightarrow \angle ACB = \frac{\angle AOB}{2} = 90^\circ - \angle OAB = \angle BAD$

השאלה בעמוד 186

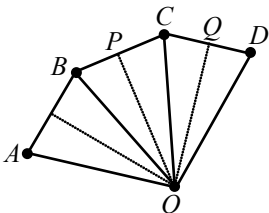


תשובה 39
 תהי $ABCD$ מקבילית חסומה במעגל.
 במקבילית, זוויות נגדיות שוות זו לזו. לכן
 מאידך, במרובע חסום במעגל סכום של זוויות נגדיות הוא 180° .
 לכן
 מכאן נקבל
 ובאופן דומה ניתן לראות שכל זוויות המקבילית הן ישרות.
 לכן המקבילית $ABCD$ היא מלבן.
 $\square$

השאלה בעמוד 186

תשובה 40
 יהי $ABCD$ מרובע קמור, ונניח שמתקיים $\angle A + \angle C = 180^\circ$. לפי משפט 8.16, סכום הזוויות בכל מרובע קמור הוא 360° . לכן $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$, ומכאן $\angle B + \angle D = 180^\circ$. לפי משפט 8.42, המרובע $ABCD$ ניתן לחסימה במעגל.

השאלה בעמוד 186



תשובה 41
 א. נתבונן בשלוש צלעות סמוכות של המצולע המשוכלל.
 נסמן ב- a את אורך צלעו של המצולע וב- α את הזווית שבין צלעות סמוכות:
 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$, $\angle ABC = \angle BCD = \alpha$
 נסמן ב- O את נקודת מפגש האנכים האמצעיים לצלעות AB, BC .
 לפי טענה 8.41,
 לפי משפט החפיפה צ.צ.צ.:
 $\triangle OBA \cong \triangle OBC$
 לכן
 $\angle OBA = \angle OBC = \frac{\alpha}{2}$
 המשולש $\triangle OBC$ שווה-שוקיים, ולכן:
 $\angle OCB = \angle OBC = \frac{\alpha}{2}$
 לפיכך
 $\angle OCD = \angle BCD - \angle OCB = \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$

כעת, תהי Q נקודת האמצע של הצלע CD . אז $\triangle OPC \cong \triangle OQC$ לפי משפט החפיפה צ.ז.צ. בפרט, $\angle OQC = \angle OPC = 90^\circ$. הקטע OQ הוא, אפוא, אנך אמצעי לקטע CD . בכך הוכחנו שהאנכים האמצעיים של כל שלוש צלעות סמוכות במצולע המשוכלל נפגשים בנקודה אחת.

עתה נוכל להמשיך אל הצלע הבאה ולקבל מיידית שגם האנך האמצעי שלה עובר דרך הנקודה O , וכן הלאה. כך נקבל שהאנכים האמצעיים לכל צלעות המצולע עוברים דרך הנקודה O . מטענה 8.41 נובע שהנקודה O נמצאת במרחק שווה מכל קודקודי המצולע. נסמן מרחק זה ב- R ונקבל שהמצולע חסום במעגל שמרכזו O ורדיוסו R . □

ב. נסמן ב- O את מרכז המעגל. לפי הנתון:

$$\angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = \dots = \angle A_nOA_1 = \frac{360^\circ}{n}$$

כמו כן, מכיוון שהנקודות $A_1, A_2, \dots, A_n$ על המעגל:

$$(1) \quad \overline{OA_1} = \overline{OA_2} = \dots = \overline{OA_n}$$

$$(2) \quad \triangle A_1OA_2 \cong \triangle A_2OA_3 \cong \triangle A_3OA_4 \dots \cong \triangle A_nOA_1 \quad \text{לפי משפט החפיפה צ.ז.צ.}$$

$$\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \dots = \overline{A_nA_1} \quad \text{לכן כל צלעות המצולע שוות זו לזו באורכן.}$$

נסמן: $\alpha = \angle OA_1A_2$. מחפיפת המשולשים (2) נובע

$$\alpha = \angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_3 = \angle OA_3A_4 = \dots = \angle OA_nA_1$$

בנוסף, המשולשים החופפים הם שוויושיקיים (לפי (1)), ולכן

$$\alpha = \angle OA_2A_1 = \angle OA_3A_2 = \angle OA_4A_3 = \dots = \angle OA_1A_n$$

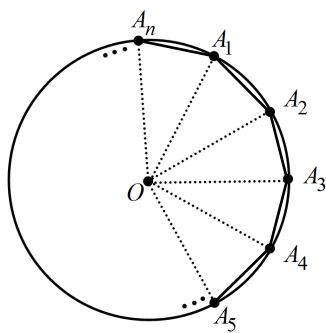
$$\angle A_1A_2A_3 = \angle OA_2A_1 + \angle OA_2A_3 = 2\alpha$$

לפיכך,

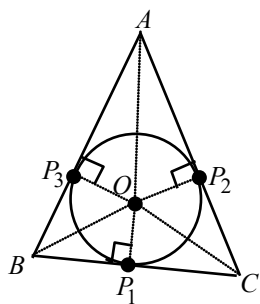
$$\angle A_2A_3A_4 = \angle OA_3A_2 + \angle OA_3A_4 = 2\alpha$$

ובאופן זה ניתן לראות שכל זוויות המצולע הן בגודל 2α .

הוכחנו שכל צלעות המצולע שוות זו לזו, וכל זוויותיו שוות. לכן המצולע משוכלל. □



השאלה בעמוד 188



תשובה 42

נסמן ב- O את מרכז המעגל החסום במשולש, וב- r את רדיוסו.

המשולש $\triangle ABC$ מתחלק לשלושת המשולשים הבאים: $\triangle BOC$, $\triangle AOC$, $\triangle AOB$.

נחשב את שטחי המשולשים:

$$S_{\triangle BOC} = \frac{\overline{BC} \cdot r}{2} = \frac{ar}{2} \quad \text{לכן } r \text{ שאורכו } OP_1 \text{ הוא הקטע } BC \text{ מ-} O$$

$$S_{\triangle AOC} = \frac{\overline{AC} \cdot r}{2} = \frac{br}{2}$$

באופן דומה:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{\overline{AB} \cdot r}{2} = \frac{cr}{2}$$

$$S = S_{\triangle ABC} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB}$$

לכן

$$= \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{(a+b+c)r}{2} = \frac{pr}{2}$$

□

השאלה בעמוד 188

תשובה 43

א. נתון משולש שווה-צלעות שאורך צלעו 1.

שטח המשולש הוא (כפי שחישבנו בעבר) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. היקף המשולש הוא 3.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3r}{2} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{לפי הנוסחה } S = pr/2$$

ב. נתון משולש ישר-זווית שאורכי ניצביו הם 1 ו-2.

כפי שראינו בשאלה 25, אורך היתר הוא $\sqrt{5}$.

$$p = 1 + 2 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5} \quad \text{היקף המשולש הוא}$$

$$S = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \quad \text{שטח המשולש הוא}$$

$$1 = \frac{(3 + \sqrt{5})r}{2} \quad \text{לפי הנוסחה } S = pr/2$$

$$\Rightarrow r = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})} = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{3^2 - \sqrt{5}^2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

השאלה בעמוד 188

תשובה 44

נתבונן במצולע משובלל בעל n צלעות, שאורך צלעו הוא a .

כפי שהוכחנו בשאלה 41, ניתן לחסום את המצולע במעגל. יהי O מרכז המעגל, ויהי R

הרדיוס. קודקודי המצולע, $A_1, \dots, A_n$, נמצאים על המעגל.

כל המשולשים $\triangle A_i O A_{i+1}$ חופפים זה לזה (צ.צ.צ), ולכן כל הזוויות המרכזיות $\angle A_i O A_{i+1}$ שוות זו לזו.

נתבונן באחד המשולשים $\triangle A_i O A_{i+1}$.

המשולש הוא שווה-שוקיים, אורך השוקיים הוא R ואורך הבסיס הוא a .

לפי משפט 8.27, התיכון לבסיס הוא גם הגובה במשולש.

לפי משפט פיתגורס, הגובה h במשולש מקיים:

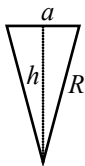
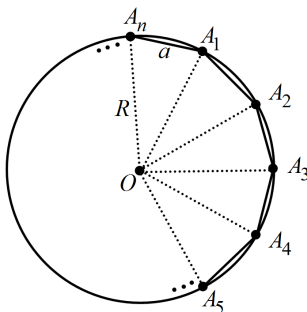
$$h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$$

נגדיר אפוא: $r = \sqrt{R^2 - (a/2)^2}$, ונתבונן במעגל שמרכזו O ורדיוסו r . כפי שראינו,

מעגל זה עובר דרך אמצעי הצלעות של המצולע, והרדיוס אל אמצעי הצלעות מאונך

לצלעות. לפי משפט 8.39, צלעות המצולע משיקות למעגל, ולכן המעגל חסום במצולע. $\square$



השאלה בעמוד 191

תשובה 45

א. הצורה המבוקשת, המסומנת I, יחד עם חצאי העיגולים II, III יוצרת חצי עיגול שקוטרו 5 ס"מ, ולכן רדיוסו 2.5 ס"מ. לכן

$$S_I + S_{II} + S_{III} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 2.5^2 = \frac{\pi \left(\frac{5}{2}\right)^2}{2} = \frac{25\pi}{8}$$

הקוטר של חצי העיגול II הוא 2, לכן רדיוסו הוא 1.

הקוטר של חצי העיגול III הוא 3, לכן רדיוסו הוא 1.5.

$$S_{II} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}, \quad S_{III} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1.5^2 = \frac{9\pi}{8}$$

לפיכך:

$$S_I = \frac{25\pi}{8} - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{9\pi}{8}\right) = \pi \left(\frac{25}{8} - \frac{4}{8} - \frac{9}{8}\right) = \frac{12\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}$$

מכאן

ב. הנקודות A, B, C מונחות על המעגל השמאלי, שמרכזו הוא D, והנקודות A, D, C מונחות על המעגל הימני, שמרכזו הוא B. רדיוסי שני המעגלים הם 1. לכן:

$$AB = BC = CD = DA = BD = 1$$

המשולשים $\triangle CBD$, $\triangle ABD$ הם שוויוצלעות. לכן $\angle ABD = \angle CBD = 60^\circ$
מכאן: $\angle ABC = 120^\circ$

שטח כל אחד מהמשולשים $\triangle CBD$, $\triangle ABD$ (משולש שווה-צלעות שאורך צלעו 1) הוא, כפי שחישבנו בעבר, $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

נחשב את שטח המשולש $\triangle ABC$ כך:

המשולשים $\triangle ADC$, $\triangle ABC$ חופפים (צ.צ.צ.) ולכן

$$2S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

כעת, נסמן את השטח המבוקש ב- S , ונתבונן במחצית שטח זה. מחצית זו, יחד עם המשולש $\triangle ABC$, מכסים גזרה מעגלית המתאימה לזווית של 120° . מכאן:

$$\frac{S}{2} + S_{\triangle ABC} = \frac{120}{360} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow S = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \approx 1.22$$

השאלה בעמוד 192

תשובה 46

2. א. ב. 7. ג. 4. ד. 10. ה. 9. ו. 6. ז. 11. ח. 8. ט. 3. י. 1. יא. 12. יב. 5.

השאלה בעמוד 192

תשובה 47

כזוויות קודקודיות, $\angle DEC = \angle AEB$.

כזוויות מתחלפות בין ישרים מקבילים, $\angle CDE = \angle BAE$.

לפיכך, $\triangle DEC \sim \triangle AEB$.

לכן

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}$$

כלומר

$$\frac{\overline{CE}}{5} = \frac{9}{8}$$

מכאן

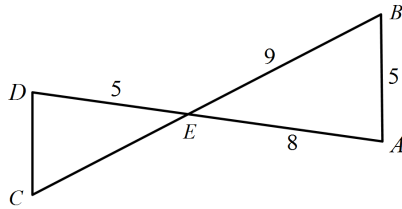
$$\overline{CE} = 5 \cdot \frac{9}{8} = \frac{45}{8} = 5\frac{5}{8}$$

בנוסף

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$$

ולכן

$$\overline{DC} = \overline{AB} \cdot \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = 5 \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$$



השאלה בעמוד 192

תשובה 48

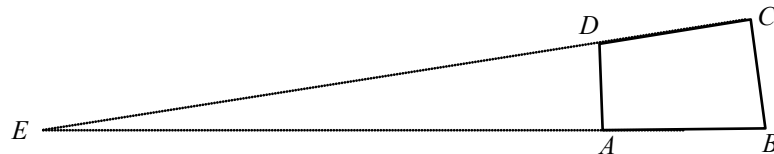
המרובע ABCD ניתן לחסימה במעגל. לפי משפט 8.42, $\angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$.

הזוויות $\angle EAD, \angle DAB$ משלימות, ולכן $\angle DAB + \angle EAD = 180^\circ$.

משני השוויונות נקבל: $\angle DCB = \angle EAD$. לכן, $\angle ECB = \angle EAD$.

הזוויות $\angle BEC, \angle DEA$ זהות (כי קרניהן מתלכדות: $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EC}$).

משוויון הזוויות נובע דמיון המשולשים: $\triangle EAD \sim \triangle ECB$.



השאלה בעמוד 193

תשובה 49

נסמן את אורכי צלעות המשולש $\triangle ABC$ כך: $a = \overline{BC}, b = \overline{AC}, c = \overline{AB}$.

נסמן את אורכי צלעות המשולש $\triangle A'B'C'$ כך: $a' = \overline{B'C'}, b' = \overline{A'C'}, c' = \overline{A'B'}$.

לפי הנתון:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \lambda$$

כלומר

$$a = \lambda a', b = \lambda b', c = \lambda c'$$

מכאן נקבל

$$a + b + c = \lambda a' + \lambda b' + \lambda c' = \lambda(a' + b' + c')$$

כלומר, היקפו של $\triangle ABC$ גדול פי λ מהיקפו של $\triangle A'B'C'$.

לפי נוסחת הרון:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c}{2} - a \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b \right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c \right)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \end{aligned}$$

ובאותו אופן:

$$S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{4} \sqrt{(a'+b'+c')(a'+b'-c')(a'-b'+c')(-a'+b'+c')}$$

כעת נציב:

$$a+b+c = \lambda a' + \lambda b' + \lambda c' = \lambda(a'+b'+c')$$

$$a+b-c = \lambda a' + \lambda b' - \lambda c' = \lambda(a'+b'-c')$$

$$a-b+c = \lambda a' - \lambda b' + \lambda c' = \lambda(a'-b'+c')$$

$$-a+b+c = -\lambda a' + \lambda b' + \lambda c' = \lambda(-a'+b'+c')$$

ביחד נקבל

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\lambda(a'+b'+c')\lambda(a'+b'-c')\lambda(a'-b'+c')\lambda(-a'+b'+c')} \\ &= \frac{1}{4} \lambda^2 \sqrt{(a'+b'+c')(a'+b'-c')(a'-b'+c')(-a'+b'+c')} \\ &= \lambda^2 S_{\triangle A'B'C'} \end{aligned}$$

□

השאלה בעמוד 193

תשובה 50

נעביר את הקטעים PA, PB, PC .

לפי נוסחת שטח המשולש,

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle APB} + S_{\triangle BPC} + S_{\triangle APC} \\ &= \frac{\overline{BC} \cdot \overline{PP_a}}{2} + \frac{\overline{AC} \cdot \overline{PP_b}}{2} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PP_c}}{2} \end{aligned}$$

נציב את אורכי הצלעות $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = 5$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{5}{2} (\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c})$$

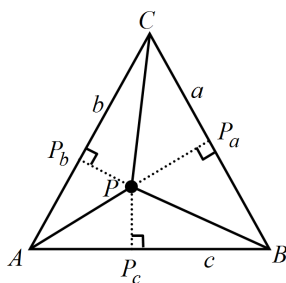
נחשב את שטח המשולש $\triangle ABC$: משולש זה דומה למשולש שאורכי צלעותיו 1,1,1 (ושטחו, כפי שחישבנו בעבר, הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$). יחס הדמיון הוא 5. לפי שאלה 49:

$$S_{\triangle ABC} = 5^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{5}{2} (\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c}) = \frac{25\sqrt{3}}{4} \quad \text{לפיכך,}$$

$$\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

בפרט, הסכום $\overline{PP_a} + \overline{PP_b} + \overline{PP_c}$ אינו תלוי במיקום הנקודה P .



השאלה בעמוד 193

תשובה 51

נתון: $\triangle ABC$ הוא משולש ישר-זווית ($\angle A = 90^\circ$), AP הוא הגובה ליתר.

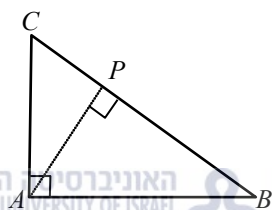
$$\angle CAB = \angle APB = 90^\circ$$

א. משויון הזוויות:

$$\angle ABC = \angle ABP = \angle PBA$$

$$\triangle ABC \sim \triangle PBA$$

נקבל



משוויון הזוויות: $\angle CAB = \angle CPA = 90^\circ$

$$\angle ACB = \angle ACP = \angle PCA$$

נקבל $\triangle ABC \sim \triangle PAC$

משני הדמיונות $\triangle ABC \sim \triangle PAC$ ו- $\triangle ABC \sim \triangle PBA$ נובע מיידית

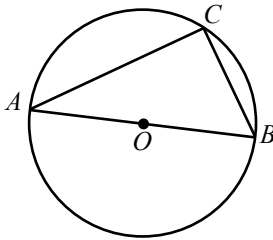
ש- $\triangle PBA \sim \triangle PAC$.

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{AP}} \quad \text{ב. מהדמיון } \triangle PBA \sim \triangle PAC \text{ נובע:}$$

$$\overline{AP}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{CP} \quad \text{נכפיל באלכסון:}$$

$$\square \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{\overline{BP} \cdot \overline{CP}}$$

השאלה בעמוד 193



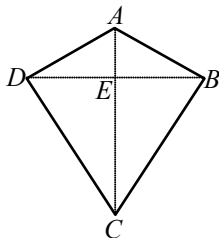
תשובה 52

א. נתבונן במשולש $\triangle ABC$ החסום במעגל ונניח ש- $\angle C = 90^\circ$.

יהי O מרכז המעגל. הזווית $\angle ACB = 90^\circ$ היא זווית היקפית הנשענת על המיתר AB . לפיכך, $\angle AOB = 2\angle ACB = 180^\circ$. לכן הנקודות A, O, B נמצאות על ישר אחד, כלומר, AB (יתר המשולש) הוא קוטר במעגל.

ב. יהי $\triangle ABC$ משולש ישר-זווית ($\angle C = 90^\circ$), ונחסום אותו במעגל. כפי שראינו בסעיף א, AB הוא קוטר במעגל ולכן O (מרכז המעגל) הוא אמצע הקטע AB . לכן CO הוא התיכון ליתר AB . CO הוא גם רדיוס במעגל, ולכן $\overline{CO} = \overline{AB}/2$. $\square$

השאלה בעמוד 193



תשובה 53

יהי $ABCD$ מרובע, ונניח שהאלכסון AC ניצב לאלכסון BD ומחלק אותו לשני חלקים שווים. נסמן ב- E את נקודת מפגש האלכסונים. לפי משפט החפיפה צ.ז.צ מתקיים:

$$\triangle AEB \cong \triangle AED$$

$$\text{לכן } \overline{AB} = \overline{AD}$$

$$\text{בנוסף, לפי צ.ז.צ מתקיים } \triangle CEB \cong \triangle CED, \text{ ולכן } \overline{CB} = \overline{CD}.$$

לפיכך, $ABCD$ הוא דלתון. $\square$

השאלה בעמוד 194

תשובה 54

נסמן את אורכי ניצבי המשולש ישר הזווית ב- a, b ואת אורך היתר ב- c .
רדיוסי חצאי העיגולים הנשענים על הניצבים הם $a/2, b/2$, ורדיוס חצי העיגול הנשען על היתר הוא $c/2$. לכן, שטחי חצאי העיגולים הנשענים על הניצבים הם

$$S_1 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi a^2}{8}, \quad S_2 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{\pi b^2}{8}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{c}{2} \right)^2 = \frac{\pi c^2}{8}$$

ושטח חצי העיגול הנשען על היתר הוא

$$a^2 + b^2 = c^2$$

לפי משפט פיתגורס, מתקיים

$$\frac{\pi a^2}{8} + \frac{\pi b^2}{8} = \frac{\pi c^2}{8}$$

נכפול ב- $\pi/8$:

□

$$S_1 + S_2 = S_3$$

כלומר

השאלה בעמוד 194

תשובה 55

המרובע $ABCD$ חסום במעגל.

כפי שראינו בשאלה 48, מתקיים

לכן

$$\triangle EAC \sim \triangle EDB$$

$$\frac{EA}{EC} = \frac{ED}{EB}$$

מכאן

□

$$EA \cdot EB = EC \cdot ED$$

השאלה בעמוד 194

תשובה 56

נתבונן במשושה המשוכלל $ABCDEF$.

לפי שאלה 41, ניתן לחסום אותו במעגל.

יהי O מרכז המעגל, ויהי R הרדיוס.

המשולשים:

$$(1) \quad \triangle AOB, \triangle BOC, \triangle COD, \triangle DOE, \triangle EOF, \triangle FOA$$

הם כולם חופפים לפי צ.צ.צ, לכן הזוויות המרכזיות הבאות שוות זו לזו:

$$\angle AOB, \angle BOC, \angle COD, \angle DOE, \angle EOF, \angle FOA$$

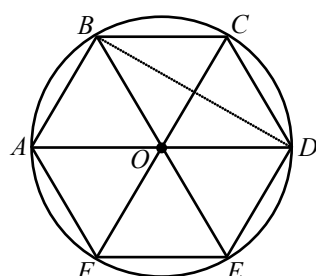
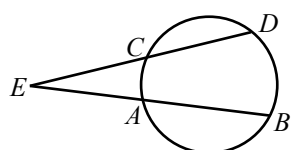
סכום זוויות אלה הוא 360° , לכן כל אחת מהן היא בגודל של 60° .

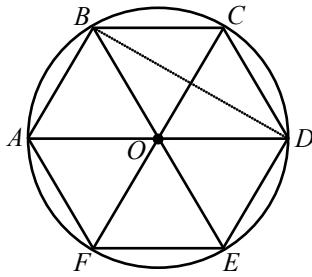
המשולש $\triangle AOB$ הוא שווה-שוקיים ($\overline{OA} = \overline{OB}$) וזווית הראש שלו היא 60° . זוויות הבסיס שוות זו לזו, וסכום זוויות המשולש הוא 180° . לכן כל זוויות המשולש שוות ל- 60° , ולפי שאלה 13, המשולש הוא שווה-צלעות. לכן כל המשולשים ברשימה (1) הם שווים-צלעות, וזוויותיהם שוות ל- 60° .

המשולש $\triangle BCD$ הוא שווה-שוקיים, וזווית הראש שלו היא

$$\angle BCD = \angle BCO + \angle OCD = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$$

(שוויון זה נובע גם מנוסחת הזווית של מצולע משוכלל, הנובעת ממשפט 8.16).





השאלה בעמוד 194

$$\angle BDC = \angle DBC = (180^\circ - 120^\circ)/2 = 30^\circ \quad \text{לפיכך,}$$

$$\angle ADB + \angle BDC = \angle ODC \quad \text{כעת,}$$

$$\angle ADB = \angle ODC - \angle BDC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ \quad \text{ולכן}$$

$$\angle BDE = \angle ADB + \angle ODE = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \quad \text{מכאן}$$

$$\angle BED = \angle OED = 60^\circ \quad \text{לבסוף,}$$

תשובה 57

א. נסמן ב־ x את רוחב המגרש, כלומר $x = \overline{AD} = \overline{BC}$.

רדיוס חצאי המעגלים היוצרים את הקשתות $\widehat{AD}, \widehat{BC}$ הוא $x/2$.

שני חצאי המעגלים יוצרים ביחד מעגל שלם, ולכן אורך שתי הקשתות $\widehat{AD}, \widehat{BC}$ יחדיו

$$2\pi \frac{x}{2} = \pi x \quad \text{הוא}$$

$$\overline{AB} + \overline{CD} + \pi x = 400 \quad \text{לכן } x \text{ צריך לקיים:}$$

$$\Rightarrow 80 + 80 + \pi x = 400 \Rightarrow x = \frac{240}{\pi} \approx 76.39$$

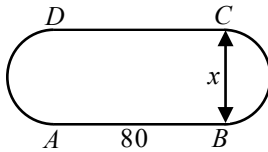
רוחב המגרש צריך להיות, אפוא, 76 מטרים ו־39 סנטימטרים.

$$80 \cdot x = \frac{80 \cdot 240}{\pi} \quad \text{ב. שטח המלבן } ABCD \text{ הוא}$$

שני חצאי העיגולים יוצרים ביחד מעגל שרדיוסו הוא $x/2$, ושטחו הוא

$$\pi \left(\frac{x}{2} \right)^2 = \pi \left(\frac{120}{\pi} \right)^2 = \frac{120^2}{\pi}$$

$$\frac{80 \cdot 240 + 120^2}{\pi} \approx 10,695.21 \quad \text{שטח המגרש הוא (במטרים רבועים):}$$



סיכום הנוסחאות בכרך ב

סימון הסכימה המרובה

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

$$\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i$$

$$\sum_{i=m}^n c a_i = c \sum_{i=m}^n a_i$$

$$\sum_{i=m}^n a_i = \sum_{i=m}^k a_i + \sum_{i=k+1}^n a_i$$

$$\sum_{i=m}^n c = (n - m + 1) \cdot c$$

סימון המכפלה המרובה

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n$$

$$n! = \prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

$$0! = 1$$

סדרה חשבונית

$$a_i = a_1 + (i - 1)d$$

$$S = \sum_{i=1}^n a_i = n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = \frac{n(2a_1 + (n - 1)d)}{2}$$

נוסחת האיבר הכללי

נוסחת הסכום

סדרה הנדסית

$$a_i = a_1 q^{i-1}$$

$$S = \sum_{i=1}^n a_i = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

נוסחת האיבר הכללי

נוסחת הסכום

נוסחת הבינום

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

פונקציות

$f(x) = C$ פונקציה קבועה

$f(x) = ax + b$ פונקציה לינארית

$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0)$ פונקציה לינארית לפי שיפוע וערך בנקודה

$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ שיפוע הפונקציה הלינארית לפי ערכה בשתי נקודות

$f(x) = ax^2 + bx + c$ פונקציה ריבועית

$\text{Im } f = \{f(a) | a \in A\}$ תמונה של פונקציה

$f(x) = f(x + np) \quad (n \in \mathbb{Z})$ פונקציה מחזורית

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ הרכבת פונקציות

פונקציה הפוכה

$f : A \rightarrow B$ בהינתן

$f(a) = b \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$ (לכל $b \in \text{Im } f$ ו- $a \in A$)

$f^{-1}(f(a)) = a$ (לכל $a \in A$)

$f(f^{-1}(b)) = b$ (לכל $b \in \text{Im } f$)

חוקי חזקות

$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ ($n \in \mathbb{N}, a > 0$)

$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ ($n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, a > 0$)

$a^{b+c} = a^b \cdot a^c$ ($c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a > 0$)

$(a^b)^c = a^{bc}$ ($c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a > 0$)

$(ab)^c = a^c b^c$ ($c \in \mathbb{R}, b > 0, a > 0$)

$a^{b-c} = \frac{a^b}{a^c}$ ($c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, a > 0$)

$\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$ ($c \in \mathbb{R}, b > 0, a > 0$)

$a^{-b} = \frac{1}{a^b}$ ($b \in \mathbb{R}, a > 0$)

חוקי השורשים

$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$ ($n \in \mathbb{N}, b > 0, a > 0$)

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ ($n \in \mathbb{N}, b > 0, a > 0$)

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ ($n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, a > 0$)

חוקי הלוגריתמים

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \quad (x \in \mathbb{R}, b > 0, a \neq 1, a > 0)$$

$$a^{\log_a b} = b \quad (b > 0, a \neq 1, a > 0)$$

$$\log_a a^x = x \quad (x \in \mathbb{R}, a \neq 1, a > 0)$$

$$\log_a 1 = 0 \quad (a \neq 1, a > 0)$$

$$\log_a bc = \log_a b + \log_a c \quad (c > 0, b > 0, a \neq 1, a > 0)$$

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad (c > 0, b > 0, a \neq 1, a > 0)$$

$$\log_a b^c = c \log_a b \quad (c \in \mathbb{R}, b > 0, a \neq 1, a > 0)$$

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{\log_a b}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, b > 0, a \neq 1, a > 0)$$

$$\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c} \quad (b > 0, c \neq 1, c > 0, a \neq 1, a > 0)$$

הפונקציה ln

$$\ln x = \log_e x ; \quad e = 2.71828... \quad (x > 0)$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad (b > 0, a > 0)$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b \quad (b > 0, a > 0)$$

$$\ln \sqrt[n]{a} = \frac{\ln a}{n} \quad (n \in \mathbb{N}, a > 0)$$

$$\ln a^b = b \ln a \quad (b \in \mathbb{R}, a > 0)$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a} \quad (b > 0, a \neq 1, a > 0)$$

$$a^b = e^{b \ln a} \quad (b \in \mathbb{R}, a > 0)$$

גיאומטריה

$$180^\circ \quad \text{סכום הזוויות במשולש}$$

$$180^\circ(n-2) \quad \text{סכום הזוויות במצולע קמור בעל } n \text{ צלעות}$$

$$180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \quad \text{הזווית במצולע משוכלל בעל } n \text{ צלעות}$$

$$S = ab \quad \text{שטח מלבן (לפי אורכי הצלעות)}$$

$$S = \frac{ab}{2} \quad \text{שטח משולש ישר-זווית (לפי אורכי הניצבים)}$$

$$S = \frac{ah}{2} \quad \text{שטח משולש (לפי בסיס וגובה אליו)}$$

שטח משולש (לפי אורכי הצלעות – נוסחת הרון)

$$S = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2} \quad ; \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

שטח טרפז (לפי אורכי שני הבסיסים AB, CD והגובה שביניהם)

$$S_{ABCD} = h \cdot \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}$$

שטח מקבילית (לפי בסיס AB והגובה אליו)

$$S_{ABCD} = h \cdot \overline{AB}$$

משפט פיתגורס (a, b ניצבים במשולש ישר-זווית; c היתר)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

היקף מעגל שרדיוסו r

$$2\pi r$$

אורך קשת במעגל שרדיוסו r (α = גודל הזווית המרכזית)

$$\frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r$$

שטח משולש לפי רדיוס המעגל החסום (p = היקף המשולש)

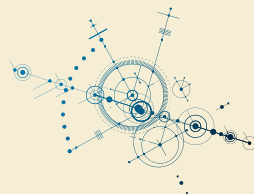
$$S = \frac{pr}{2}$$

שטח העיגול

$$S = \pi r^2$$

שטח גזרה מעגלית (r = הרדיוס; α = גודל הזווית המרכזית)

$$S = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2$$



סדרת הספרים **מתמטיקה קדם אקדמית**, המלווה את הקורס בשם זה, היא שער כניסה ללימודים אקדמיים בתחומי המתמטיקה והמדעים. היא כוללת את מרבית נושאי המתמטיקה התיכוניים, בגישה שיטתית המעודדת חשיבה עצמאית והבנה תיאורטית.

הספרים מתאימים ללימוד עצמי, ומכילים מאות תרגילים ופתרונותיהם. הם מיועדים בראש ובראשונה לסטודנטים המתכוננים ללימודים אקדמיים בתחומי המדעים, אך מתאימים גם לתלמידי תיכון המעוניינים להעמיק את הבנתם ולכלל המבקשים להשלים את השכלתם המתמטית הבסיסית.

הנכר הראשון עוסק באריתמטיקה בסיסית, זהויות ומשוואות אלגבריות ואי-שוויונות, **הנכר השני** בסדרות ואינדוקציה, פונקציות, חזקות ולוגריתמים ומושגים בגיאומטריה, **והנכר השלישי** בטריגונומטריה, גיאומטריה אנליטית וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי.

ד"ר גיל אלון הוא מתמטיקאי וחבר סגל בכיר במחלקה למתמטיקה ולמדעי המחשב באוניברסיטה הפתוחה.

קורס 95003

מק"ט 95003-2029

מסת"ב 978-965-06-1716-5

lamda-openubooks.co.il



0 020895 003221

דאנאקוד 208-9500322

 למדא - ספרי האוניברסיטה הפתוחה

